

电气工程专业规划教材

# 电力网络分析及其应用

蔡金锭 郑文迪 编

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 · BEIJING

## 内 容 简 介

电力网络分析及其应用是电气工程专业研究生的一门课程。书中重点介绍了电力网络基本知识、分析方法及其在工程中的应用。全书共 9 章,分别介绍了电力网络概论、电力网络的矩阵方程、电力网络的等值变换、电力网络的灵敏度分析、容差网络故障的区间分析及可测点的选择、电力网络功率流图原理及其应用、电力网络的状态方程、电力网接地网故障诊断技术和电力网络分析的计算机实现等内容。

为了便于读者学习,书中除了详细阐述基本原理外,还附有分析应用示例、计算数据和形图。读者通过学习能系统掌握电力网络理论的分析方法。本书除了作为研究生的学习教程之外,也可以作为电力工程技术人员的学习和参考书。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。  
版权所有,侵权必究。

## 图书在版编目 (CIP) 数据

电力网络分析及其应用 / 蔡金铨, 郑文迪编. —北京: 电子工业出版社, 2016.7  
ISBN 978-7-121-29157-9

I. ①电… II. ①蔡… ②郑… III. ①电力网络分析—高等学校—教材 IV. ①TM711

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 141823 号

策划编辑: 任欢欢

责任编辑: 任欢欢

印 刷:

装 订:

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编: 100036

开 本: 787×1 092 1/16 印张: 14.5 字数: 371.2 千字

版 次: 2016 年 7 月第 1 版

印 次: 2016 年 7 月第 1 次印刷

定 价: 36.50 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010)88254888, 88258888。

质量投诉请发邮件至 [zltz@phei.com.cn](mailto:zltz@phei.com.cn), 盗版侵权举报请发邮件至 [dbqq@phei.com.cn](mailto:dbqq@phei.com.cn)。

本书咨询联系方式: 192910558(QQ 群)。

# 前 言

电力网络分析及其应用是电气工程专业研究生的一门课程。书中着重介绍了电力网络的基本知识、分析方法及其在电力工程中的应用。全书共 9 章，第 1 章主要介绍电力网络概论；第 2 章详细阐述了电力网络的矩阵方程；第 3 章介绍电力网络的等值变换；第 4 章阐述了电力网络的灵敏度分析计算方法；第 5 章详细介绍了容差网络故障的区间分析及可测点的选择；第 6 章介绍了电力网络功率流图原理及其应用；第 7 章介绍了电力网络的状态方程；第 8 章介绍了电力网接地网故障诊断技术；第 9 章是电力网络分析的计算机实现。

书中除了详细地介绍电力网络基本知识外，在内容上注重理论与实际应用相结合。为了便于读者学习，在书中部分章节中还列出了应用分析示例、计算数据和形图。读者通过学习能系统掌握电力网络理论的分析方法。本书除了作为研究生学习教程之外，也可以作为电力工程技术人员的学习和参考书。

本书由蔡金锭教授和郑文迪博士编写。刘庆珍副教授为本书的编写提供了部分章节的内容，全书由蔡金锭教授统稿和审核。本书的立项和编写得到福州大学教务处、研究生院的大力支持。福州大学电气工程与自动化学院研究生林雪倩、曾庆美、陈汉城、林智勇、詹启帆、汪波、颜诚、陈聪伟、官嘉玉、刘俊、杨建波、谢松等为本书文字编校等工作付出了辛勤劳动，在此向他们致以谢意，同时也向书中引用的所有参考文献的作者深表谢意。

由于电力网络分析及其应用涉及的知识面广而深，限于作者水平，难免在书中出现遗落、错误和缺点，恳请读者谅解并批评指正。

编 者

2016 年 4 月于福州大学



# 目 录

第 1 章	电力网络概论	1
1.1	电力网络的构成	1
1.2	电力网络的模型	2
1.2.1	基本元件	2
1.2.2	变压器	4
1.2.3	电力线路	5
1.3	电力网络图论基础	10
1.4	电力网络的矩阵	11
1.4.1	关联矩阵	11
1.4.2	回路矩阵	13
1.4.3	割集矩阵	13
1.4.4	路径矩阵	14
1.4.5	拓扑矩阵之间的关系	14
第 2 章	电力网络的矩阵方程	18
2.1	电力网络矩阵方程的基本概念	18
2.1.1	基尔霍夫电流定律	18
2.1.2	基尔霍夫电压定律	19
2.1.3	特勒根定理	20
2.2	电力网络的基本方程	20
2.2.1	典型支路及其约束	20
2.2.2	节点电压方程	21
2.2.3	回路电流方程	22
2.2.4	割集电压方程	22
2.2.5	路径电流方程	23
2.3	电力网络的特殊支路	24
2.3.1	变压器支路	24
2.3.2	受控源支路	26
2.3.3	电感耦合支路	30
2.4	电力网络矩阵方程的修改	32
2.4.1	支路导纳发生变化	32
2.4.2	变压器变比发生变化	33
2.4.3	增加节点	33
2.4.4	消去节点	33
2.4.5	节点合并	35
2.5	电力网络混合变量方程	35

第 3 章	电力网络等值变换	40
3.1	多射形与网形网络的变换	40
3.1.1	星形变为三角形及负荷移置	40
3.1.2	多射形变为网形及负荷移置	41
3.2	诺顿等值与戴维南等值	42
3.2.1	单端口诺顿等值和戴维南等值	42
3.2.2	多端口诺顿等值与戴维南等值	44
3.3	WARD 等值	45
3.4	REI 等值	48
第 4 章	电力网络的灵敏度分析	53
4.1	灵敏度的概念	53
4.1.1	网络方程的灵敏度	53
4.1.2	代数方程组的灵敏度	56
4.1.3	网络公式与算法	57
4.2	电力网络的灵敏度	59
4.2.1	线性网络的灵敏度	59
4.2.2	摄动方程	59
4.2.3	节点-支路阻抗矩阵	60
4.2.4	一般网络方程的灵敏度	60
4.2.5	电力网络方程的灵敏度	61
4.3	增量网络法	63
4.4	伴随网络法	70
4.4.1	伴随网络	70
4.4.2	用伴随网络法计算灵敏度	73
4.5	张量法	78
第 5 章	容差网络故障的区间分析及可测点的选择	83
5.1	引言	83
5.2	含有容差网络的区间分析	83
5.2.1	区间节点电压方程计算方法	84
5.2.2	故障仿真分析实例	85
5.3	容差网络故障的区间判定	86
5.4	容差子网络级故障区间诊断	89
5.4.1	线性容差子网络级故障区间诊断	89
5.4.2	非线性容差子网络级故障区间诊断	90
5.5	容差网络可测点电压灵敏度与故障识别关系	93
5.6	撕裂端口零电流门限灵敏度与故障识别关系	94
5.7	容差子网络级可测点的优化选择	95
5.7.1	容差网络可测点合理选择示例一	96
5.7.2	容差网络可测点合理选择示例二	98
5.8	优化选择可测点对子网络故障诊断的影响	102

5.8.1	可测点合理选择对子网络 $N_1$ 零门限 $D_0$ 的影响	102
5.8.2	可测点合理选择对子网络故障诊断的影响	103
5.9	本章小结	106
第 6 章	电力网络功率流图原理及其应用	107
6.1	流图的基本概念	107
6.2	流图与线性方程的关系	108
6.3	功率流图与矩阵方程	108
6.4	电力网络流图的形成法	109
6.5	流图的运算规则	111
6.6	传输(增益)的求解	113
6.7	路径与回路的搜索法	114
6.8	封闭信号流图法	116
6.9	Coates 流图及其应用	118
6.9.1	Coates 流图	119
6.9.2	Coates 公式	119
第 7 章	电力网络的状态方程	124
7.1	状态变量法的基本概念	124
7.1.1	状态、状态变量、状态方程	124
7.1.2	网络复杂性的阶数	125
7.2	线性网络的状态方程	129
7.2.1	编写状态方程的基本考虑	130
7.2.2	线性时不变 R、L、C、M 网络的状态方程	133
7.2.3	状态方程的端口建立法	139
7.3	状态方程的建立	145
7.3.1	利用信号流图建立状态方程	145
7.3.2	代数余子式的拓扑法	151
7.4	单双口网络状态方程	152
7.4.1	单口网络策动点函数 $Z_d(s)$ 和 $Y_d(s)$	152
7.4.2	双口网络 Z 函数	152
第 8 章	电力网接地网故障诊断技术	154
8.1	接地网故障的原因及其故障的危害性	154
8.1.1	接地网的导体腐蚀	154
8.1.2	土壤电阻率不均匀	154
8.1.3	电位分布不均	155
8.1.4	接地网故障的危害性	155
8.2	接地电阻常用的计算方法	155
8.2.1	接地网设计及有关问题	156
8.2.2	接地网形式	156
8.2.3	接地网的材料	156
8.2.4	设计误差及改进措施	156

8.2.5	接地电阻的计算方法	157
8.3	降低接地电阻的方法和措施	159
8.3.1	降阻材料应用及接地极防腐措施	160
8.3.2	降低接地电阻的物理和化学方法	161
8.3.3	高阻区降低电阻的措施	161
8.3.4	变电站接地网的特殊降阻措施	162
8.3.5	深孔压力灌注接地降阻	163
8.4	接地网故障诊断字典法	164
8.4.1	字典法故障诊断介绍	165
8.4.2	字典法故障诊断仿真示例	168
8.5	接地网故障分块诊断法	171
8.5.1	分块法故障诊断理论	171
8.5.2	接地网分块故障定位仿真	174
第 9 章	电力网络分析的计算机实现	177
9.1	MATLAB 软件在电力网络中的应用	177
9.1.1	MATLAB 语言结构	177
9.1.2	空间管理命令	180
9.1.3	MATLAB 的 M 文件	181
9.1.4	MATLAB 的矩阵运算	181
9.2	潮流计算的计算机算法	192
9.2.1	概述	192
9.2.2	潮流计算的数学模型	192
9.2.3	迭代法潮流计算	194
9.2.4	牛顿法潮流计算	196
9.2.5	P-Q 分解法潮流计算	198
9.3	稀疏技术	200
9.3.1	稀疏矩阵简介	200
9.3.2	稀疏矩阵存储技术	201
9.3.3	对角元素不稀疏的稀疏矩阵存储	202
9.3.4	三角分解技术	203
9.3.5	稀疏矩阵方程的计算	204
9.3.6	稀疏向量矩阵	206
9.3.7	网络演化	208
9.3.8	节点编号技术	213
附录		215
附录 A		215
附录 B		216
附录 C		220
参考文献		224



# 电力网络概论

## 1.1 电力网络的构成

为了将发电厂所生产的电能经济有效地传输至电力负荷中心，常常采用高电压线路输送电力，将发电厂生产的电能经升压变压器升压，再经高压传输线路输送并在用户端经降压变压器逐级降压，分配给广大用户。这种由发电厂、变电所、输电线路、配电系统和负荷等组成的电能生产、传输、分配和消费的系统叫作电力系统，如图 1-1 所示。

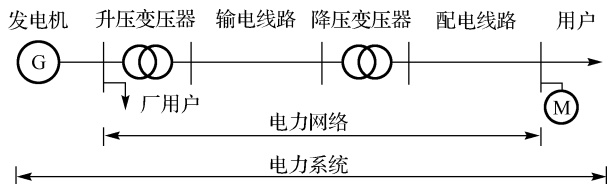


图 1-1 电力系统的构成

其中，由变压器、电力线路等变换、输送、分配电能设备所组成的联系发电与用电的统一整体，即电力系统中不包括发电厂与用电设备的部分，称为电力网络，或简称电网，其又可分为输电网与配电网两部分。

输电网将远离负荷的大型发电厂发出的电能经变压器升压后，通过输电线路送到大、中城市及其他大负荷中心的枢纽变电所。输电线路距离都比较大，有的数十、数百公里，甚至数千公里以上。为提高电力输送容量及其稳定性，并减少输送过程中的损耗，一般都采用超高压输电网送电。电力系统通常采用多回超高压骨干线路，经由不同路径，构成输电网架，并在大负荷中心地区形成以环形接线把多个枢纽变电所连接起来的输电网受端网架。我国交流输电网主要包括 220kV、330kV、500kV 以及 1000kV 四个电压等级。

配电网是指连接并从输电网受端网架受电，向一地区内供电和配送电能的电力网络，一般采用闭环设计、开环运行，其结构呈辐射状。在我国通常按电压等级分为高压配电网（35kV～110kV），中压配电网（6kV～20kV）和低压配电网（220V/380V）。

变压器是利用电磁感应的原理来改变交流电压的装置，主要构件是初级线圈、次级线圈和铁芯（磁芯）。主要功能有：电压变换、电流变换、阻抗变换、隔离、稳压（磁饱和变压器）等。按用途可以分为：电力变压器和特殊变压器（电炉变、整流变、工频试验变压器、调压器、矿用变、音频变压器、中频变压器、高频变压器、冲击变压器、仪用变压器、电子变压器、电抗器、互感器等）。

## 1.2 电力网络的模型

对电力网络有了初步认识之后,就可根据其中各元件的结构与特性进行建模。本节首先介绍电路理论中最基本的三种元件,然后再对电力网络两大元件——变压器和电力线路的建模方法进行阐述。

### 1.2.1 基本元件

如图 1-2 所示,电路元件是电力网络中最基本的组成单元。电路元件通过其端子与外部连接,其特性通过与端子有关的电路物理量描述。每种元件通过端子的两种物理量反映一种确定的电磁性质,元件的两个端子的电路物理量之间的代数函数关系称为元件的端子特性。

电路物理量有电压  $u$ 、电流  $i$ 、电荷  $q$  以及磁链  $\psi$  等。若表征元件特性的代数关系是一个线性关系,则该元件称为线性元件。电阻元件反映了电压  $u$  与电流  $i$  的线性关系;电感元件反映了磁链  $\psi$  与电流  $i$  的线性关系;电容元件反映了电荷  $q$  与电压  $u$  的线性关系。因此,上述三种基本元件都是线性元件。

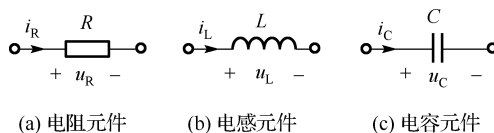


图 1-2 基本元件

#### 1. 电阻元件

电阻器、白炽灯、电炉等在一定条件下可以用二端线性电阻元件作为其模型。如图 1-2(a) 所示,在电压和电流取关联参考方向时,在任何时刻其两端的电压和电流服从欧姆定律

$$u_R = i_R R \quad (1-1)$$

式中,  $R$  为电阻元件的参数,称为元件的电阻。 $R$  是一个正实常数,单位为  $\Omega$ 。

令  $G = 1/R$ , 则

$$i_R = G u_R \quad (1-2)$$

式中,  $G$  称为电阻元件的电导。电导的单位是 S。若电压、电流参考方向取非关联参考方向,两者符号相反。

当有正弦电流  $i_R = \sqrt{2} I_R \cos(\omega t + \phi)$  通过时,根据欧姆定律,电压-电流的时域关系为

$$u_R = R i_R = \sqrt{2} R I_R \cos(\omega t + \phi) \quad (1-3)$$

说明电阻上的电压、电流都是同频的正弦量。令电压相量为  $\dot{U}_R = U_R \angle \phi$ , 则相量形式有

$$\dot{U}_R = R I_R \angle \phi = R \dot{I}_R \quad (1-4)$$

它们的有效值仍符合欧姆定律,且幅角相等,即电压、电流同相。

## 2. 电感元件

电感元件是线圈的一种理想化模型,它反映了电流产生磁通和磁场能量储存这一物理现象,当一个线圈通电流后产生的磁场随时间变化时,在线圈中就产生感应电压。线性电感元件的图形符号如图 1-2(b)所示,一般在图中不必也难以画出  $\psi_L$  的参考方向,但规定  $\psi_L$  与电流  $i$  的参考方向满足右手螺旋关系。对于线性电感元件,其元件特性为

$$\psi_L = Li_L \quad (1-5)$$

式中,  $L$  为电感元件参数,称为自感系数或电感,它是一个正实常数。在国际单位中,磁通和磁通链的单位是 Wb,电感的单位是 H。

当有正弦电流  $i_L = \sqrt{2}I_L \cos(\omega t + \phi)$  通过时,电感的电压-电流的时域关系为

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = -\sqrt{2}\omega LI_L \sin(\omega t + \phi) = \sqrt{2}\omega LI_L \cos(\omega t + \phi + 90^\circ) \quad (1-6)$$

说明电感上的电压、电流都是同频的正弦量。令电压相量为  $\dot{U}_L = U_L \angle \phi$ ,  $u_L$  的表达式变换后的相量形式有

$$\dot{U}_L = j\omega L \dot{I}_L \quad (1-7)$$

电压、电流有效值之间的关系类似于欧姆定律,但与角频率  $\omega$  有关,其中与频率成正比的  $\omega L$  具有与电阻相同的量纲  $\Omega$ ,称为感抗。这样命名表示它与电阻有本质上的差别,电感  $L$  上的电压降跟随频率变化,当  $\omega = 0$  时,  $\omega L = 0$ ,  $u_L = 0$ ,电感相当于短路;当  $\omega = \infty$  时,  $\omega L \rightarrow \infty$ ,  $i = 0$ ,电感相当于开路,在相位上电压超前电流  $90^\circ$ 。

## 3. 电容元件

在工程技术中,电容器的应用极为广泛。电容器虽然品种、规格各异,但就其构成原理来说,电容器都是由间隔以不同介质的两块金属板组成。当在两极板上加上电压后,两极板上分别聚集起等量的正、负电荷,并在介质中建立电场而具有电场能量。将电源移去后,电荷可继续聚集在极板上,电场继续存在。所以电容器是一种能储存电荷或者说储存电场能量的部件。电容元件就是反映这种物理现象的电路模型,其图形符号如图 1-2(c)所示,当电压参考极性与极板储存电荷的极性一致时,线性电容元件的元件特性为

$$q_C = Cu_C \quad (1-8)$$

式中,  $C$  是电容元件的参数,称为电容,它是一个正实常数,单位为 F。

若电容元件的电流  $i$  和电压  $u$  取关联参考方向,则得到电容元件的电压和电流关系为

$$i_C = \frac{dq_C}{dt} = \frac{d(Cu_C)}{dt} = C \frac{du_C}{dt} \quad (1-9)$$

上式表明电流和电压的变化率成正比。当电容上电压发生剧变(即  $du_C/dt$  很大)时,电流很大。当电压不随时间变化时,电流为零。故电容在直流情况下其两端电压恒定,相当于开路,或者说电容有隔断直流的作用。

对于电容,它的电压、电流关系的相量形式与电感  $L$  类似。当有正弦电流  $i_C = \sqrt{2}I_C \cos(\omega t + \phi)$  通过时,其时域形式的关系为

$$u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt = \sqrt{2} \frac{1}{\omega C} I_C \sin(\omega t + \phi) \quad (1-10)$$

说明电容上的电压、电流为同频的正弦量，电压、电流关系的相量形式为

$$\dot{U}_C = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I}_C \quad (1-11)$$

电压、电流有效值之间的关系类似于欧姆定律，但与频率 $\omega$ 有关，式中与频率成反比的 $-1/\omega C$ 具有与电阻相同的量纲 $\Omega$ ，称为容抗。电容电压将随频率变化而变化，当 $\omega=0$ 时， $1/\omega C=\infty$ ， $i_C=0$ ，电容相当于开路；当 $\omega=\infty$ 时， $1/\omega C \rightarrow 0$ ， $u_C=0$ ，电容相当于短路，在相位上电流超前电压 $90^\circ$ 。

### 1.2.2 变压器

在电力系统分析中变压器通常采用 $\Gamma$ 形等值电路，如图1-3所示，双绕组变压器包含一条串联支路和一条并联支路，其串联支路表征高低压绕组归算于同一电压等级下的阻抗总和，并联支路表示励磁支路的导纳；三绕组变压器由三条串联支路与一条并联支路构成，串联支路分别为高、中、低三侧绕组各自的等值阻抗，并联支路的意义与双绕组的相同。

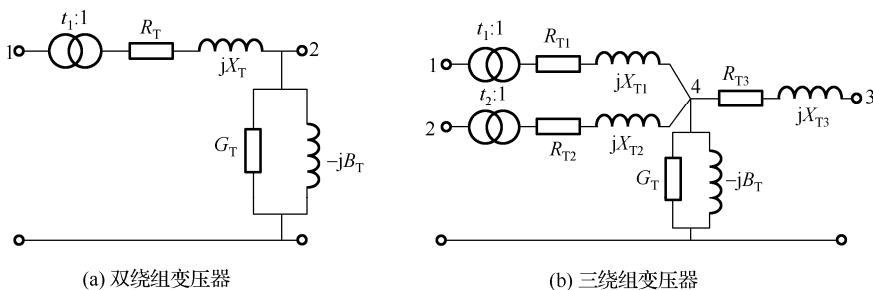


图 1-3 变压器模型

变压器的阻抗参数可通过短路试验时测得的短路容量与短路电压百分值获得，导纳参数可由空载试验时测得的空载损耗与空载电流百分值计算出。值得注意的是三绕组变压器按其三个绕组排列方式的不同有两种不同结构——升压结构和降压结构。升压结构变压器的中压绕组最靠近铁芯，低压绕组居中，高压绕组在最外层。降压结构变压器的低压绕组最靠近铁芯，中压绕组居中，高压绕组仍在最外层。绕组排列方式不同，绕组间漏抗从而短路电压也就不同，有可能出现处于居中位置的绕组与位于它两侧两个绕组间的两个漏抗之和小于该两绕组相互间的漏抗，导致计算出的居中绕组等值电抗为负，但此现象不表示该绕组有容性漏抗。由于此负值电抗的绝对值较小，近似计算中可取零。

图中阻抗支路左侧为一理想变压器， $t_i$ 为理想变压器的变比。变压器电压变换的功能可以通过 $\Pi$ 形等值电路来体现。

如图1-4(a)所示为图1-3中一条带变压器的阻抗支路，流入、流出理想变压器的功率相等，可得

$$\dot{U}_i \dot{I}_i = \dot{U}_i' \dot{I}_i' \quad (1-12)$$

理想变压器两侧节点电压、电流满足

$$\begin{cases} \dot{U}_i = t_i \dot{U}'_i \\ \dot{I}_i = \frac{1}{t_i} \dot{I}'_i \end{cases} \quad (1-13)$$

流经  $Z_T$  的电流

$$\dot{I}'_i = -\dot{I}_j = \frac{1}{Z_k} (\dot{U}'_i - \dot{U}_j) = \frac{1}{Z_k} \left( \frac{1}{t_i} \dot{U}_i - \dot{U}_j \right) \quad (1-14)$$

利用式 (1-13) 和式 (1-14) 可写作

$$\begin{cases} \dot{I}_i = \frac{1}{t_i} \dot{I}'_i = \frac{1}{Z_k} \left( \frac{1}{t_i^2} \dot{U}_i - \frac{1}{t_i} \dot{U}_j \right) \\ \dot{I}_j = -\frac{1}{Z_k} \left( \frac{1}{t_i} \dot{U}_i - \dot{U}_j \right) \end{cases} \quad (1-15)$$

设存在如图 1-4(b)所示的  $\Pi$  形等值电路, 可列出

$$\begin{cases} \dot{I}_i = (y_{10} + y_{12}) \dot{U}_i - y_{12} \dot{U}_j \\ \dot{I}_j = -y_{21} \dot{U}_i + (y_{20} + y_{21}) \dot{U}_j \end{cases} \quad (1-16)$$

对照式 (1-15) 和式 (1-16) 可得

$$\left. \begin{aligned} y_{12} &= y_{21} = \frac{1}{Z_k t_i} \\ y_{10} &= \frac{1 - t_i}{Z_k t_i^2} \\ y_{20} &= \frac{t_i - 1}{Z_k t_i} \end{aligned} \right\} \quad (1-17)$$

因此, 变压器模型中含理想变压器的阻抗支路可以用  $\Pi$  形等值电路表示, 并可利用式 (1-17) 求得其参数。

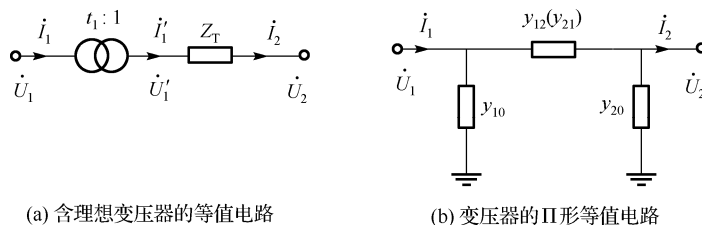


图 1-4 变压器等值模型

另外, 变压器不仅有改变电压大小而且有移相功能时, 其变比  $t_i$  为复数。虽也可求出各参数的值, 但由于  $y_{12} \neq y_{21}$ , 不能用  $\Pi$  形等值电路表示, 具体的解决方法将在第 2 章 2.3 节相关内容中作详细介绍。

## 1.2.3 电力线路

根据电力系统分析的知识, 可求出电力线路单位长度的电阻、电抗、电纳、电导。严格来说, 电力线路的参数是均匀分布的, 即使是极短的一段线段, 都有相应大小的电阻、电抗、

电纳、电导。换言之，即使是复杂的等值电路，也不能认为是精确的。但又由于电力线路一般不长，需要分析的往往也只是它们的端点状况——两端电压、电流、功率，通常可不考虑线路的这种分布参数特性，只是在个别情况下才要用双曲函数研究具有均匀分布参数的线路。以下，先讨论集中参数模型。

### 1. 集中参数模型

顾名思义，集中参数模型指的是将阻抗参数、导纳参数分别简单地集中起来，以达到简化计算的目的。集中参数模型一般适用于中等及中等以下长度线路，对架空线路，其长度不超过 300km；对电缆线路，不超过 100km。

在以下讨论中，以  $R(\Omega)$ 、 $X(\Omega)$ 、 $G(S)$ 、 $B(S)$  分别表示全线路每相的总电阻、电抗、电导、电纳。显然，线路长度为  $l(\text{km})$  时

$$\begin{cases} R = r_1 l; & X = x_1 l \\ G = g_1 l; & B = b_1 l \end{cases}$$

通常，由于线路导线截面积的选择，以晴朗天气不发生电晕为前提，而沿绝缘子的泄漏又很小，可设  $G=0$ 。

根据线路长度的不同，集中参数模型又可细分为阻抗等值电路和  $\Pi$  形等值电路两种。

#### ① 阻抗等值电路。

对于长度不超过 100km 的短架空线路，当线路电压不高时，电纳  $B$  的影响一般不大，可略去。从而，这类线路的等值电路最简单，只有一串联的总阻抗  $Z = R + jX$ ，如图 1-5 所示。

由图 1-5 可得

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad (1-18)$$

将式 (1-18) 与电路理论中介绍过的两端口或四端口网络方程

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad (1-19)$$

相比较，可得这种等值电路的通用常数  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$

$$\left. \begin{aligned} A &= 1 \\ B &= Z \\ C &= 0 \\ D &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (1-20)$$

#### ② $\Pi$ 形等值模型。

$\Pi$  形等值模型一般用于中等长度线路，所谓中等长度线路，是指长度在 100~300km 的架空线路以及不超过 100km 的电缆线路。这种线路的电纳  $B$  一般不能略去，其模型如图 1-6 所示。

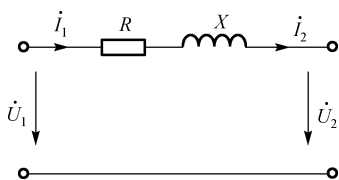


图 1-5 阻抗等值电路

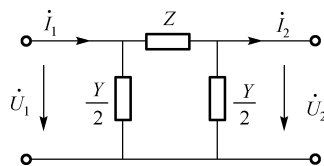


图 1-6  $\Pi$  形等值模型

在 $\Pi$ 型等值电路中,除串联的线路总阻抗 $Z = R + jX$ 外,还将线路的总导纳 $Y = jB$ 分为两半,分别并联在线路的始末端。

由图 1-6 可得,流过串联阻抗 $Z$ 的电流为 $\dot{I}_2 + \frac{Y}{2}\dot{U}_2$ ,从而

$$\dot{U}_1 = \left( \dot{I}_2 + \frac{Y}{2}\dot{U}_2 \right) Z + \dot{U}_2 \quad (1-21)$$

流入始端导纳 $\frac{Y}{2}$ 的电流为 $\frac{Y}{2}\dot{U}_1$ ,从而

$$\dot{I}_1 = \frac{Y}{2}\dot{U}_1 + \frac{Y}{2}\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \quad (1-22)$$

由此可得

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ZY}{2} + 1 & Z \\ Y\left(\frac{ZY}{4} + 1\right) & \frac{ZY}{2} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad (1-23)$$

将式(1-23)与式(1-19)相比较,可得 $\Pi$ 形等值电路的通用常数

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{ZY}{2} + 1; & B &= Z \\ C &= Y\left(\frac{ZY}{4} + 1\right); & D &= \frac{ZY}{2} + 1 \end{aligned} \right\} \quad (1-24)$$

## 2. 均匀分布参数等值模型

对于长度超过 300km 的架空线路以及长度超过 100km 的电缆线路,不能不考虑它们的分布参数特性,其电路如图 1-7 所示。图中, $z_1$ 、 $y_1$  分别表示单位长度线路的阻抗和导纳; $U$ 、 $I$  分别表示距线路末端长度为 $x$ 处的电压、电流; $\dot{U} + d\dot{U}$ 、 $\dot{I} + d\dot{I}$  分别表示距线路末端长度为 $x + dx$ 处的电压、电流; $dx$ 为长度的微元。

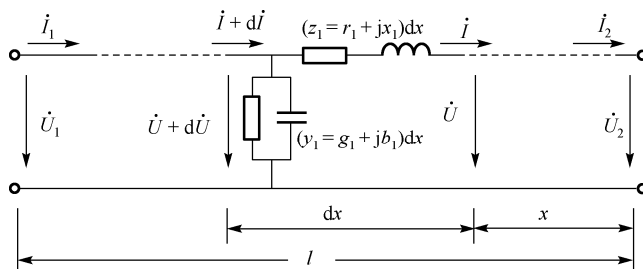


图 1-7 均匀分布参数电路

由图 1-7 可见,长度为 $dx$ 的线路,串联阻抗中的电压降落为 $\dot{I}_1 dx$ ,并联导纳中的分支电流为 $\dot{U}_1 y_1 dx$ 。从中可列出

$$d\dot{U} = \dot{I}_1 dx \quad \text{或} \quad \frac{d\dot{U}}{dx} = \dot{I}_1 \quad (1-25)$$

$$d\dot{I} = \dot{U}y_1 dx \quad \text{或} \quad \frac{d\dot{I}}{dx} = \dot{U}y_1 \quad (1-26)$$

取式 (1-25) 和式 (1-26) 对  $x$  的微分, 可得

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = z_1 \frac{d\dot{I}}{dx} \quad (1-27)$$

$$\frac{d\dot{U}^2}{dx^2} = y_1 \frac{d\dot{U}}{dx} \quad (1-28)$$

分别以式 (1-27) 和式 (1-28) 代入上两式, 又可得

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = z_1 y_1 \dot{U} \quad (1-29)$$

$$\frac{d\dot{I}^2}{dx^2} = z_1 y_1 \dot{I} \quad (1-30)$$

式 (1-29) 的解可得为

$$\dot{U} = C_1 e^{\sqrt{z_1 y_1} x} + C_2 e^{-\sqrt{z_1 y_1} x}$$

将其微分后代入式 (1-25), 又可得

$$\dot{I} = \frac{C_1}{\sqrt{z_1/y_1}} e^{\sqrt{z_1 y_1} x} - \frac{C_2}{\sqrt{z_1/y_1}} e^{-\sqrt{z_1 y_1} x}$$

上两式中,  $\sqrt{z_1/y_1} = Z_c$  称特性阻抗, 而  $\sqrt{z_1 y_1} = \gamma$  则是相应的线路传播系数。将  $Z_c$ 、 $\gamma$  分别取代上式中的  $\sqrt{z_1/y_1}$ 、 $\sqrt{z_1 y_1}$ , 它们可改写为

$$\dot{U} = C_1 e^{\gamma x} + C_2 e^{-\gamma x} \quad (1-31)$$

$$\dot{I} = \frac{C_1}{Z_c} e^{\gamma x} - \frac{C_2}{Z_c} e^{-\gamma x} \quad (1-32)$$

记及  $x=0$  时,  $\dot{U} = \dot{U}_2$ 、 $\dot{I} = \dot{I}_2$ , 可见

$$\dot{U}_2 = C_1 + C_2; \quad \dot{I}_2 = \frac{C_1 - C_2}{Z_c}$$

从而

$$C_1 = \frac{\dot{U}_2 + Z_c \dot{I}_2}{2}; \quad C_2 = \frac{\dot{U}_2 - Z_c \dot{I}_2}{2}$$

以此代入式 (1-31)、式 (1-32), 可得

$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_2 + Z_c \dot{I}_2}{2} e^{\gamma x} + \frac{\dot{U}_2 - Z_c \dot{I}_2}{2} e^{-\gamma x} \quad (1-33)$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_2/Z_c + \dot{I}_2}{2} e^{\gamma x} + \frac{\dot{U}_2/Z_c - \dot{I}_2}{2} e^{-\gamma x} \quad (1-34)$$



考虑到双曲函数有如下定义

$$\sinh \gamma x = \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2}; \quad \cosh \gamma x = \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2}$$

式(1-33)、式(1-34)又可改写为

$$\begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma x & Z_c \sinh \gamma x \\ \frac{\sinh \gamma x}{Z_c} & \cosh \gamma x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad (1-35)$$

运用上式, 已知末端电压、电流时, 计算沿线路任意点的电压、电流。如以  $x=l$  代入, 则可得

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma l & Z_c \sinh \gamma l \\ \frac{\sinh \gamma l}{Z_c} & \cosh \gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad (1-36)$$

由上式可见, 这种电路的两端口网络通用常数分别为

$$\left. \begin{aligned} A &= \cosh \gamma l; & B &= Z_c \sinh \gamma l \\ C &= \frac{\sinh \gamma l}{Z_c}; & D &= \cosh \gamma l \end{aligned} \right\} \quad (1-37)$$

若只要求计算线路始末端电压、电流、功率, 仍可运用类似图 1-6 所示的  $\Pi$  形等值电路。设这种等值电路如图 1-8 所示, 并以  $Z'$ 、 $Y'$  表示它们的集中参数阻抗、导纳。套用式(1-24)并计及式(1-37), 可解得

$$\begin{aligned} Z' &= Z_c \sinh \gamma l \\ Y' &= \frac{1}{Z_c} \frac{2(\cosh \gamma l - 1)}{\sinh \gamma l} \end{aligned} \quad (1-38)$$

显然是精确的, 但由于  $Z'$ 、 $Y'$  的表达式中,  $Z_c$ 、 $\gamma$  是复数, 它们仍不便于使用。为此, 将其简化如下。将式(1-38)改写为

$$\begin{aligned} Z' &= \sqrt{\frac{Z}{Y}} \sinh \sqrt{ZY} = Z \frac{\sinh \sqrt{ZY}}{\sqrt{ZY}} \\ Y' &= \sqrt{\frac{Y}{Z}} \frac{2(\cosh \sqrt{ZY} - 1)}{\sinh \sqrt{ZY}} = Y \frac{2(\cosh \sqrt{ZY} - 1)}{\sqrt{ZY} \sinh \sqrt{ZY}} \end{aligned} \quad (1-39)$$

将式中的双曲函数展开为级数, 并取它们的前三项代入式(1-39), 可得

$$\begin{aligned} Z' &\approx Z \left( 1 + \frac{ZY}{6} \right) \\ Y' &\approx Y \left( 1 - \frac{ZY}{12} \right) \end{aligned} \quad (1-40)$$

将  $Z = R + jX = r_1 l + jx_1 l$ ,  $Y = G + jB = g_1 l + jb_1 l$  以及  $G = g_1 l = 0$  代入展开, 可得

$$Z' \approx r_1 l \left( 1 - x_1 b_1 \frac{l^2}{3} \right) + jx_1 l \left[ 1 - \left( x_1 b_1 - \frac{r_1^2 b_1}{x_1} \right) \frac{l^2}{6} \right] \quad (1-41)$$

$$Y' \approx b_1 l \times r_1 b_1 \frac{l^2}{12} + j b_1 l \left( 1 + x_1 b_1 \frac{l^2}{12} \right)$$

由式(1-24)可知,如将长线路的总电阻、电抗、电纳分别乘以适当的修正系数,就可绘制其简化 $\Pi$ 形等值电路如图1-9所示。这些修正参数分别为

$$\begin{aligned} k_r &= 1 - x_1 b_1 \frac{l^2}{3} \\ k_x &= 1 - \left( x_1 b_1 - \frac{r_1^2 b_1}{x_1} \right) \frac{l^2}{6} \\ k_b &= 1 + x_1 b_1 \frac{l^2}{12} \end{aligned} \quad (1-42)$$

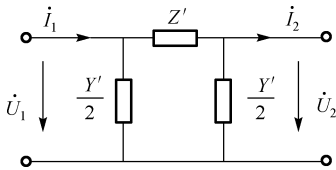


图 1-8 均匀分布参数的 $\Pi$ 形等值电路

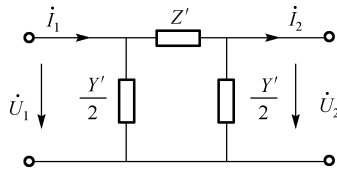


图 1-9 均匀分布参数的 $\Pi$ 形等值电路

需要注意的是,由于推导式(1-42)时,只取用了双曲函数的前前三项,在线路很长时,该式也不适用,应直接使用式(1-39)。反之,线路不长时,这些修正系数都接近于1,可不修正。

### 1.3 电力网络图论基础

在电力网络分析中,将以图论为数学工具来选择电路独立变量,列出与之相应的独立方程。图论在电力网络中的应用也称为“网络图论”。网络图论为电力网络分析建立严密的数学基础并提供系统化的表达方法,更为利用计算机分析、计算、设计大规模电路问题奠定了基础。

图是对电力网络拓扑结构的抽象描述,它是支路和节点的集合;支路是二端元件的抽象,任何一条支路都有两个端点;节点是支路端点的抽象,网络中支路的连接点。

如果把电力网络中各支路的内容忽略不计,代之以线段,就成为它的图。如图1-10(a)所示为一双端供电的简单电力系统,电源分别通过两条电力线路为一负载供电。根据1.2节中电力网络的建模方法,可将电力线路转换成如图1-10(b)所示的 $\Pi$ 形等值电路,合并同一节点上的导纳支路,命名“地”为④号节点,则可表示成如图1-10(c)的形式。

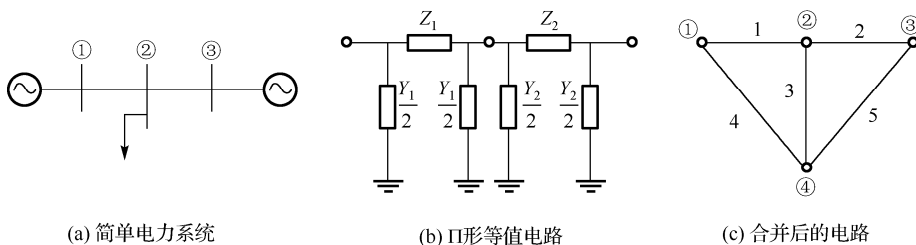


图 1-10 某简单电力网络电路

赋予支路方向的图称为有向图，电力网络中通常指定每一条支路中的电流参考方向，电压一般取关联参考方向。从一个图  $G$  的某一节点出发，沿着一些支路移动，从而达到另一节点（或回到原出发点），这样的一系列支路构成图  $G$  的一条路径。一条支路本身也算为路径。对任何一对顶点之间至少有一条路径的图，称为连通图。如果一条路径的起点和终点重合，并且经过的其他节点不重复，那么，这条闭合路径就成为图的一个回路。

一个图中可包含若干子图，当图  $G_i$  的支路集和节点集均属于图  $G$  时，可以称图  $G_i$  为图  $G$  的子图。若连通图  $G$  中存在连通子图  $G_i$ ，包含  $G$  中的所有节点，但不包含任何回路，则子图  $G_i$  称为图  $G$  的树。树中所含的支路，称为该树的树支；连通图  $G$  中除去树支以外的支路，称为对应于该树的连支。

电力网络一般抽象成有向连通图，设其包含  $n+1$  个节点、 $b$  条支路，为了使每个节点和支路的物理量有确定的意义，必须要规定一个参考节点，因此图  $G$  的独立节点数为  $n$ ，称为图  $G$  的秩。在连通图中选定一棵树，其树支的数量一定等于独立节点数  $n$ 。在此基础上选择仅包含一条连支的回路，称为基本回路。显然，基本回路的数量与连支的数量一致，即基本回路数=连支数  $l=b-n$ 。在图 1-10(c)中，共有独立节点 3 个，支路 5 条，若选择树  $T=\{1,2,3\}$ ，则连支  $L=\{4,5\}$ ，其基本回路为  $\{1,3,4\}$  及  $\{2,3,5\}$ 。

割集连通图中的一组支路的最小集合，它把图分割成两个互不连通的子图（其中一个子图可以是一个孤立的节点）。被分割出来的部分是图的一个广义节点。在图中选定一棵树后，仅包含一条树支的割集称为基本割集，显然其与树支相对应，即：基本割集数=支路数= $n$ 。

## 1.4 电力网络的矩阵

一个网络的连接关系可以用一个图来表示，也可以用拓扑矩阵来表示。由于可以从不同的角度、用不同的形式来说明这一连接关系，因此拓扑矩阵包含多种形式，可用于描述节点与支路的关系、回路与支路的关系、割集与支路的关系等。

在关联矩阵中，任意划去一个节点（非独立节点），所得到相应的矩阵就称之为基本关联矩阵。

本节以如图 1-11 所示的有向连通图  $G$  为例，介绍几种基本关联矩阵的建立方法以及它们之间的关系。设在图 1-11 中，选择树  $T=\{1,2,3\}$ ，则连支  $L=\{4,5,6\}$ 。

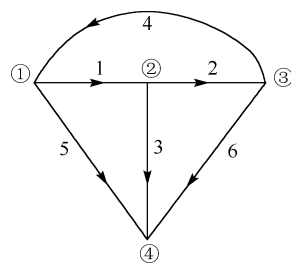


图 1-11 有向连通图  $G$

### 1.4.1 关联矩阵

表征节点与支路之间关系的矩阵称为关联矩阵 (incidence matrix)，其增广形式用  $\tilde{A}$  表示，以  $\tilde{A}$  的行代表节点，列代表支路，故对于  $n$  个独立节点， $b$  条支路的图而言， $\tilde{A}$  的阶数为  $(n+1) \times b$ 。 $\tilde{A}$  的元素为

$$\tilde{a}_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{节点 } i \text{ 是支路 } k \text{ 的始点} \\ -1 & \text{节点 } i \text{ 是支路 } k \text{ 的终点} \\ 0 & \text{节点 } i \text{ 不是支路 } k \text{ 的端点} \end{cases}$$

对应图 1-11，其关联矩阵  $\tilde{A}$  为

$$\tilde{\mathbf{A}}_{(n+1) \times b} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1-43)$$

矩阵  $\tilde{\mathbf{A}}$  有  $b$  个列矢量，每一列对应于一条支路。由于一条支路连接于两个节点，若离开一个节点，则必然指向另一个节点，因此每一列仅有两个非零元素且一个为 1 另一个为 -1。将  $\tilde{\mathbf{A}}$  的全部行相加为零，故  $\tilde{\mathbf{A}}$  的行不是线性独立的，各行线性相关，可以任意划去一行，得到关联矩阵  $\mathbf{A}$ 。则将图 1-11 中的节点④设为参考节点，除去式 (1-43) 的第四行，得

$$\mathbf{A}_{n \times b} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

由图 G 可唯一地列写出关联矩阵  $\mathbf{A}$ ，同样给出  $\mathbf{A}$  也可以唯一地画出图 G。

若列写关联矩阵时树支号和连支号分开编，先树支后连支，并用  $\mathbf{A}_T$  表示树支列矩阵， $\mathbf{A}_L$  表示连支列矩阵，则

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_T \mid \mathbf{A}_L] \quad (1-44)$$

因为树支数为  $n$ ，连支数为  $l$ ，所以  $\mathbf{A}_T$  为  $n$  阶方阵， $\mathbf{A}_L$  为  $n \times l$  阶矩阵。

利用数学归纳法可以证明

$$\det \mathbf{A}_T = \pm 1 \quad (1-45)$$

当  $n=1$  时，图中只有一条支路，式(1-45)必然成立。设  $n=k$  时式(1-45)成立，即  $\det \mathbf{A}_{T,k} = \pm 1$ 。那么  $n=k+1$  时相当于在原图某一节点上延伸出一条树支与新增节点相连，使得矩阵  $\mathbf{A}_{T,k}$  增加一阶，用  $\mathbf{A}_{T,k+1}$  表示。 $\mathbf{A}_{T,k+1}$  中新增节点所对应的行只有一个非零元素且为 1 或 -1，则  $\mathbf{A}_{T,k+1}$  的行列式为

$$\det \mathbf{A}_{T,k+1} = \pm 1 \cdot \det \mathbf{A}_{T,k} = \pm 1 \quad (1-46)$$

因此式 (1-45) 成立，同时也可知  $\mathbf{A}_T$  是非奇异的，其秩为  $n$ ，故  $\mathbf{A}$  的秩也为  $n$ 。由以上证明可以看出，从  $\mathbf{A}$  中抽出  $n$  列构成方阵，若这些列对应一个树，则该方阵为非奇异，且其行列式为  $\pm 1$ ；若不是对应一个树，则必含回路，为奇异矩阵，行列式等于 0。

引入线性代数中的比纳-柯西定理：假设  $\mathbf{A}$  是一个  $m \times n$  矩阵，而  $\mathbf{B}$  是一个  $n \times m$  矩阵。如果  $S$  是  $\{1, \dots, n\}$  中具有  $m$  个元素的子集，我们记  $\mathbf{A}_S$  为  $\mathbf{A}$  中列指标位于  $S$  中的  $m \times m$  子矩阵。类似地，记  $\mathbf{B}_S$  为  $\mathbf{B}$  中行指标位于  $S$  中的  $m \times m$  子矩阵，则

$$\det(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \sum_S \det(\mathbf{A}_S) \det(\mathbf{B}_S) \quad (1-47)$$

考虑  $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)$ ，仅当子集  $S$  所对应的支路构成一个树时， $\det(\mathbf{A}_S) \det(\mathbf{A}_S^T) = (\pm 1)(\pm 1)$ ，否则为零，故

$$\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = \text{Num}(T) \quad (1-48)$$

### 1.4.2 回路矩阵

表征基本回路与支路之间关系的矩阵称为回路矩阵 (Loop Matrix), 用  $\mathbf{B}$  表示。 $\mathbf{B}$  的行代表回路, 列代表支路, 其元素为

$$b_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{支路 } k \text{ 在回路 } j \text{ 内, 且二者方向相同} \\ -1 & \text{支路 } k \text{ 在回路 } j \text{ 内, 且二者方向相反} \\ 0 & \text{支路 } k \text{ 不在回路 } j \text{ 内} \end{cases}$$

对于有向连通图  $G$ , 共有 3 个基本回路, 如图 1-12 所示。

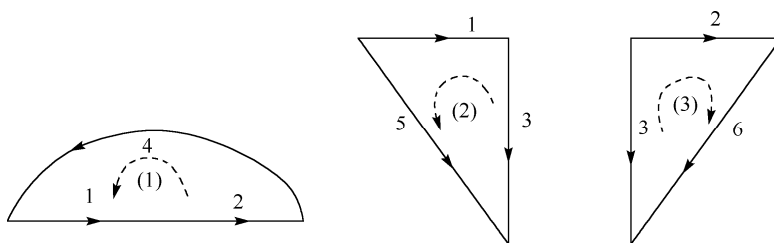


图 1-12 图  $G$  的基本回路

按照先树支后连支的顺序, 则其回路矩阵可表示为

$$\mathbf{B} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

其中, 连支部分刚好构成一个单位矩阵, 因为回路绕向与连支方向一致, 则每一行只含一条连支, 于是形成一  $l$  阶单位矩阵, 剩下的树支部分仍用  $\mathbf{B}_T$  表示, 则回路矩阵又可写作

$$\mathbf{B}_{l \times b} = [\mathbf{B}_T \mid \mathbf{B}_L] = [\mathbf{B}_T \mid \mathbf{E}_l] \quad (1-49)$$

其中,  $\mathbf{B}_L$  即连支部分构成的  $l$  阶单位矩阵, 可见  $\mathbf{B}$  的秩均为  $l$ 。

### 1.4.3 割集矩阵

表征基本割集和支路之间关系的矩阵称为割集矩阵 (Cut-set Matrix), 用  $\mathbf{Q}$  表示,  $\mathbf{Q}$  的行代表割集, 列代表支路, 其元素为

$$q_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{支路 } k \text{ 在割集 } i \text{ 内, 且二者方向相同} \\ -1 & \text{支路 } k \text{ 在割集 } i \text{ 内, 且二者方向相反} \\ 0 & \text{支路 } k \text{ 不在割集 } i \text{ 内} \end{cases}$$

如图 1-13 所示展示了有向连通图  $G$  的基本割集, 按照先树支后连支的顺序, 则其割集矩阵可表示为

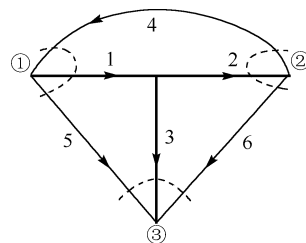


图 1-13 图  $G$  的基本割集

$$\mathbf{Q} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

用  $\mathbf{Q}_T$  表示割集与树支之间关系的  $n$  阶子矩阵,  $\mathbf{Q}_L$  表示割集与连支之间关系的  $n \times l$  阶子矩阵。当列写割集矩阵时, 由于树支和连支分开编号且顺次列写, 且割集方向和树支方向一致, 则树支部分  $\mathbf{Q}_T$  刚好构成一  $n$  阶单位矩阵, 即

$$\mathbf{Q}_{n \times b} = [\mathbf{Q}_T \mid \mathbf{Q}_L] = [\mathbf{E}_n \mid \mathbf{Q}_L] \quad (1-50)$$

可见  $\mathbf{Q}$  的秩均为  $n$ 。

#### 1.4.4 路径矩阵

节点的路径指节点沿树到参考节点所经过的路径上的集合, 用  $\mathbf{P}$  表示。对于一棵给定的树, 节点的路径是唯一的, 路径矩阵的元素为

$$p_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{以节点 } i \text{ 为起点的路径经过支路 } k, \text{ 且二者同向} \\ -1 & \text{以节点 } i \text{ 为起点的路径经过支路 } k, \text{ 且二者反向} \\ 0 & \text{以节点 } i \text{ 为起点的路径不经过支路 } k \end{cases}$$

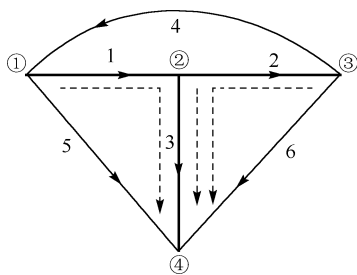


图 1-14 图 G 各节点的路径

图 G 各节点路径如图 1-14 的虚线所示。按先树支后连支的顺序, 可写出其路径矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{matrix}$$

将与树支对应的部分用  $\mathbf{P}_T$  表示, 连支对应的部分用  $\mathbf{P}_L$  表示, 可以看出  $\mathbf{P}_L$  是一个零矩阵, 则路径矩阵可写作

$$\mathbf{P}_{n \times b} = [\mathbf{P}_T \mid \mathbf{P}_L] = [\mathbf{P}_T \mid \mathbf{0}_{n \times l}]$$

#### 1.4.5 拓扑矩阵之间的关系

##### 1. 关联矩阵与回路矩阵之间的关系

若同一有向连通图的关联矩阵  $\mathbf{A}$  和回路矩阵  $\mathbf{B}$  的列按相同的支路顺序排列, 则有

$$\mathbf{AB}^T = \mathbf{0}_{n \times l} \quad \text{或} \quad \mathbf{BA}^T = \mathbf{0}_{l \times n} \quad (1-51)$$

证明如下:

设  $\mathbf{AB}^T = \mathbf{C}$ , 那么  $c_{ij} = \sum_{k=1}^b a_{ik} b_{jk}$ , 即矩阵  $\mathbf{C}$  中的元素  $c_{ij}$  是矩阵  $\mathbf{A}$  中第  $i$  行元素与矩阵  $\mathbf{B}$  第  $j$  行相应元素乘积之和。下面分两种情况讨论。

(1) 节点  $i$  不属于回路  $j$ 。若支路  $k$  与回路  $j$  有关联, 则必定与节点  $i$  无关联, 这时  $b_{jk} \neq 0$ ,  $a_{ik} = 0$ 。相反, 若支路  $k$  与节点  $i$  有关联, 则必定与回路  $j$  无关联, 这时  $a_{ik} \neq 0$ ,  $b_{jk} = 0$ 。在这两种情况下均有  $c_{ij} = 0$ 。

(2) 节点  $i$  属于回路  $j$ 。因为回路  $j$  中有且仅有两条支路与节点  $i$  相关联, 设为支路  $p$ 、 $m$  (见图 1-15), 故  $c_{ij} = a_{ip}b_{jp} + a_{im}b_{jm}$ 。 $p$ 、 $m$  两条支路与节点  $i$  的关联方向有两种情形:

① 两条支路都指向 (或都背离) 节点  $i$ 。如图 1-15(a) 所示, 矩阵  $A$  第  $i$  行中与这两条支路对应的元素  $a_{ip}$ 、 $a_{im}$  取值相同, 或同为  $-1$ , 或同为  $+1$ ; 两支路中必有一条与回路  $j$  方向相同, 另一条与回路  $j$  方向相反, 在矩阵  $B$  的第  $j$  行中与这两条支路对应的元素  $b_{jp}$ 、 $b_{jm}$  取值相反, 一个是  $+1$ , 另一个是  $-1$ , 故在此情况下  $c_{ij} = 0$ 。

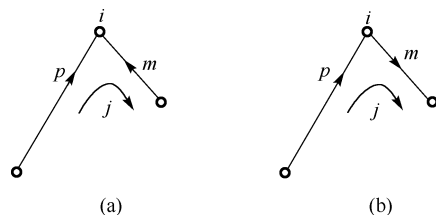


图 1-15 节点  $i$  与节点  $j$  关联关系

② 一条支路指向节点  $i$ , 另一条支路背离节点  $i$ 。如图 1-15(b) 所示, 矩阵  $A$  第  $i$  行中与这两条支路对应的元素  $a_{ip}$ 、 $a_{im}$  取值相反, 一个为  $-1$ , 另一个为  $+1$ ; 两支路或都与回路  $j$  方向相同, 或都与回路  $j$  方向相反, 在矩阵  $B$  的第  $j$  行中与这两条支路对应的元素  $b_{jp}$ 、 $b_{jm}$  或同为  $+1$ , 或同为  $-1$ 。故在此情况下  $c_{ij} = 0$ 。

综合以上讨论说明无论在什么情况下  $c_{ij}$  都等于 0, 因此式 (1-51) 成立。

若将  $A$  和  $B$  的列按先树支后连支的顺序排列, 基本回路的顺序与对应连支的顺序一致。则

$$BA^T = [B_T \mid E_l] \begin{bmatrix} A_T^T \\ -A_L^T \end{bmatrix} = B_T A_T^T + A_L^T = 0 \Rightarrow B_T A_T^T = -A_L^T \quad (1-52)$$

由于  $A_T$  是一个非奇异矩阵, 故

$$B_T = -A_L^T (A_T^T)^{-1} = -(A_T^{-1} A_L)^T \quad (1-53)$$

则回路矩阵可表示为

$$B = [-(A_T^{-1} A_L)^T \mid E_l] \quad (1-54)$$

因此, 若已知关联矩阵  $A$ , 可由式 (1-54) 写出回路矩阵  $B$ 。

## 2. 割集矩阵与回路矩阵之间的关系

若同一有向连通图  $G$  按相同的支路顺序排列, 则有:

$$QB^T = 0_{n \times l} \quad \text{或} \quad BQ^T = 0_{l \times n} \quad (1-55)$$

证明如下:

设  $QB^T = D$ , 则  $d_{ij} = \sum_{k=1}^b q_{ik} b_{jk}$ , 矩阵  $D$  中的元素  $d_{ij}$  是矩阵  $Q$  第  $i$  行各元素与矩阵  $B$  第  $j$  行

相应元素乘积之和。下面分两种情况讨论。

(1) 割集  $i$  与回路  $j$  无公共支路。若支路  $k$  与割集  $i$  有关联, 则必定与回路  $j$  无关联, 因此  $q_{ik} \neq 0$ ,  $b_{jk} = 0$ 。反之, 若支路  $k$  与回路  $j$  有关联, 则必定关于割集  $i$  无关联, 因此,  $b_{jk} \neq 0$ ,  $q_{ik} = 0$ 。在这两种情况下均有  $d_{ij} = 0$ 。

(2) 割集  $i$  与回路  $j$  有公共支路, 那么假设割集将连通图  $G$  的节点分为两个节点集合  $C_1$  和  $C_2$ , 则割集中每一条支路的端点分别属于  $C_1$ 、 $C_2$ , 若割集  $i$  与回路  $j$  有公共支路, 设回路  $j$  从  $C_1$  中的节点  $a$  出发, 经某一支路到达  $C_2$ , 必须经另一支路从  $C_2$  返回  $C_1$  中的节点  $a$  以形成回路, 并且根据基本回路以及基本割集的定义, 两条支路必有一条为树支一条为连支。设割集  $i$  与回路  $j$  有树支  $p$ 、连支  $m$  两条公共支路, 则  $d_{ij} = q_{ip}b_{jp} + q_{im}b_{jm}$ 。支路  $p$ 、 $m$  与割集  $i$  和回路  $j$  的关联方向有两种情形:

① 两条支路的方向均与割集  $i$  的方向相同。如图 1-16(a)所示, 在矩阵  $\mathbf{Q}$  第  $i$  行中与这两条支路相应的元素  $q_{ip}$ 、 $q_{im}$  同为 1; 连支  $m$  与回路  $j$  方向相同, 树支  $p$  与回路  $j$  方向相反, 故矩阵  $\mathbf{B}$  第  $j$  行与这两条支路相应的元素  $b_{jp} = -1$ ,  $b_{jm} = +1$ 。因此,  $d_{ij} = 0$ 。

② 一条支路方向与割集  $i$  方向相同, 另一条支路方向与割集  $i$  方向相反。如图 1-16(b)所示, 树支  $p$  与割集  $i$  方向相同, 矩阵  $\mathbf{Q}$  第  $i$  行中与这两条支路相应的元素  $q_{ip} = +1$ 、 $q_{im} = -1$ ; 两支路必均与回路  $j$  方向相同, 矩阵  $\mathbf{B}$  第  $j$  行中与这两条支路相应的元素  $b_{jp}$ 、 $b_{jm}$  或同为 +1, 或同为 -1。因此,  $d_{ij} = 0$ 。

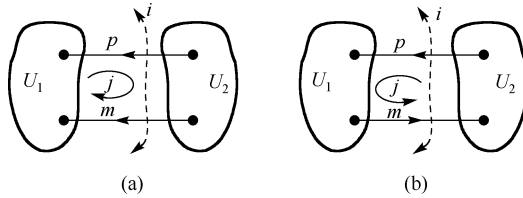


图 1-16 割集  $i$  与回路  $j$  关联关系

由上述可知, 无论基本割集与基本回路有无公共支路, 均满足  $d_{ij} = 0$ , 公式 (1-55) 成立。

若将  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{B}$  的列按先树支后连支的顺序排列, 那么

$$\mathbf{B}\mathbf{Q}^T = [\mathbf{B}_T \mid \mathbf{E}_l] \begin{bmatrix} \mathbf{E}_n \\ \mathbf{Q}_L^T \end{bmatrix} = \mathbf{B}_T + \mathbf{Q}_L^T = 0$$

则

$$\mathbf{B}_T = -\mathbf{Q}_L^T \quad (1-56)$$

将式 (1-56) 两边取转置, 得

$$\mathbf{Q}_L = -\mathbf{B}_T^T \quad (1-57)$$

因此, 有

$$\mathbf{B} = [-\mathbf{Q}_L^T \mid \mathbf{E}_l] \quad (1-58)$$

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{E}_n \mid -\mathbf{B}_T^T] \quad (1-59)$$

若已知割集矩阵  $\mathbf{Q}$ , 可根据式 (1-58) 写出回路矩阵  $\mathbf{B}$ ; 若已知回路矩阵  $\mathbf{B}$ , 则可由式 (1-59) 写出割集矩阵  $\mathbf{Q}$ 。



### 3. 割集矩阵与关联矩阵之间的关系

因为

$$\mathbf{Q}_L = -\mathbf{B}_T^T \quad (1-60)$$

由于  $\mathbf{B}_T = -(\mathbf{A}_T^{-1} \mathbf{A}_L)^T$ ，则

$$\mathbf{Q}_L = (\mathbf{A}_L^T (\mathbf{A}_T^{-1})^T)^T = \mathbf{A}_T^{-1} \mathbf{A}_L \quad (1-61)$$

### 4. 路径矩阵与关联矩阵之间的关系

若有向连通图  $G$  的路径矩阵与关联矩阵的行按相同的节点顺序排列，则有

$$\mathbf{P}_T^T = \mathbf{A}_T^{-1} \quad (1-62)$$

证明如下：

首先，从每个节点至参考节点都增加一条连支，连支的方向由参考节点指向各个节点，如图1-17中的虚线所示，按照先树支后连支的顺序形成新的关联矩阵  $\mathbf{A}' = [\mathbf{A} \quad -\mathbf{E}_n] = [\mathbf{A}_T \quad \mathbf{A}_L \quad -\mathbf{E}_n]$  和回路矩阵  $\mathbf{A}' = [\mathbf{A} \quad -\mathbf{E}_n] = [\mathbf{A}_T \quad \mathbf{A}_L \quad -\mathbf{E}_n]$ 。

由于新增连支个数与节点个数相等，且其方向由参考节点指向各节点，故应在原关联矩阵右部增补  $n$  阶负单位矩阵，即

$$\mathbf{A}' = [\mathbf{A} \quad -\mathbf{E}_n] = [\mathbf{A}_T \quad \mathbf{A}_L \quad -\mathbf{E}_n]$$

新增的基本回路必然由新增连支与对应的节点到参考节点的路径构成，其个数也与节点个数相等。将新增支路按与对应节点一致的顺序排列，则新的回路矩阵可写作

$$\mathbf{B}' = \left[ \begin{array}{cc|c} \mathbf{B}_T & \mathbf{E}_l & 0 \\ \hline \mathbf{P}_T & 0 & \mathbf{E}_n \end{array} \right]$$

由于

$$\mathbf{A}' \mathbf{B}'^T = 0$$

即

$$[\mathbf{A}_T \quad \mathbf{A}_L \quad -\mathbf{E}_n] \begin{bmatrix} \mathbf{B}_T^T & \mathbf{P}_T^T \\ \mathbf{E}_l & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_n \end{bmatrix} = 0$$

那么

$$\mathbf{A}_T \mathbf{P}_T^T - \mathbf{E}_n = 0 \Rightarrow \mathbf{A}_T \mathbf{P}_T^T = \mathbf{E}_n$$

由于  $\mathbf{A}_T$  是一个非奇异矩阵，故

$$\mathbf{P}_T^T = \mathbf{A}_T^{-1}$$

命题得证。

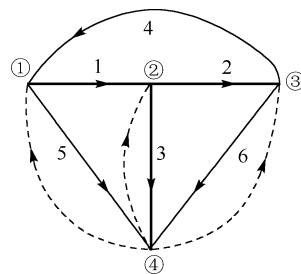


图 1-17 增加连支后的有向连通图  $G$

# 电力网络的矩阵方程

## 2.1 电力网络矩阵方程的基本概念

电力系统网络模型可用网络元件参数和网络元件的连接关系确定,在实际电力系统网络计算中,我们希望有更为简单的网络模型的描述方法,即用一个既包含网络元件参数又包含网络元件连接关系的矩阵来描述电力系统网络模型。

对于有  $n$  个独立节点,  $b$  条支路的电力网络图  $G$ ,在选定了树  $T$  后,连支数  $l=b-n$ 。在正弦稳态分析中,可定义如下相量形式的物理量:

- ① 节点电压向量  $\dot{U}_N$ :  $n$  个独立节点上的节点电压构成的列向量;
- ② 节点注入电流向量  $\dot{I}_N$ : 由  $n$  个独立节点注入网络的电流构成的列向量;
- ③ 支路电流向量  $\dot{I}_B$ :  $b$  条支路上的支路电流构成的列向量;
- ④ 支路电压向量  $\dot{U}_B$ :  $b$  条支路上的支路电压构成的列向量。

### 2.1.1 基尔霍夫电流定律

设电力网络图  $G$  支路电流向量  $\dot{I}_B$  的支路排列顺序与关联矩阵  $A$  的列一致, KCL 方程可表示为

$$A\dot{I}_B = 0 \quad (2-1)$$

支路编号按先树支后连支的顺序,则关联矩阵和支路电流向量可分块为

$$A = [A_T \quad A_L] \quad (2-2)$$

$$\dot{I}_B = \begin{bmatrix} \dot{I}_T \\ \dot{I}_L \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

式中,  $\dot{I}_T$  表示树支电流向量,  $\dot{I}_L$  表示连支电流向量。于是

$$A\dot{I}_B = [A_T \quad A_L] \begin{bmatrix} \dot{I}_T \\ \dot{I}_L \end{bmatrix} = A_T\dot{I}_T + A_L\dot{I}_L = 0$$

由于  $A_T$  是一个非奇异矩阵,又因为  $A_T^{-1}A_L = Q_L$ , 故

$$\dot{I}_T = -A_T^{-1}A_L\dot{I}_L = -Q_L\dot{I}_L \quad (2-4)$$

由此可以看出,  $b$  条支路中,只有  $l$  个连支电流是独立的,树支电流可由连支电流决定。

将式(2-4)代入式(2-3)，考虑  $\mathbf{B}=[-(\mathbf{A}_T^{-1}\mathbf{A}_L)^T \mid \mathbf{E}_l]$ ，得

$$\dot{\mathbf{I}}_B = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_T \\ \dot{\mathbf{I}}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_T^{-1}\mathbf{A}_L \\ \mathbf{E}_l \end{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_L = \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{I}}_L \quad (2-5)$$

式(2-5)就是基本回路矩阵  $\mathbf{B}$  表示的 KCL 方程的矩阵形式，建立了支路电流和回路电流之间的变换关系。

再根据式(2-4)，考虑  $\mathbf{Q}_T = \mathbf{E}_n$  是  $n$  阶单位矩阵，得

$$\dot{\mathbf{I}}_T + \mathbf{Q}_L \dot{\mathbf{I}}_L = [\mathbf{E}_n \mid \mathbf{Q}_L] \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_T \\ \dot{\mathbf{I}}_L \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \dot{\mathbf{I}}_B = 0 \quad (2-6)$$

其含义为，在电力网络中，用一个闭合面分割出一个独立部分，穿过闭合面的所有支路组成一个割集，其所有支路的电流代数和为零。这一个独立部分是一个广义节点。

### 2.1.2 基尔霍夫电压定律

设电力网络图  $G$  支路电压向量  $\dot{\mathbf{U}}_B$  的支路排列顺序与回路矩阵  $\mathbf{B}$  的列一致，KVL 方程可表示为

$$\mathbf{B} \dot{\mathbf{U}}_B = 0 \quad (2-7)$$

支路编号按先树支后连支的顺序，则回路矩阵和支路电压向量可分块为

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_T \mid \mathbf{E}_l] \quad (2-8)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_B = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_T \\ \dot{\mathbf{U}}_L \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

式中， $\dot{\mathbf{U}}_T$  表示树支电压向量， $\dot{\mathbf{U}}_L$  表示连支电压向量。于是

$$\mathbf{B} \dot{\mathbf{U}}_B = [\mathbf{B}_T \mid \mathbf{E}_l] \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_T \\ \dot{\mathbf{U}}_L \end{bmatrix} = \mathbf{B}_T \dot{\mathbf{U}}_T + \dot{\mathbf{U}}_L = 0 \quad (2-10)$$

由于  $\mathbf{B}_T$  是一个非奇异矩阵，又因为  $-\mathbf{B}_T = \mathbf{Q}_L^T$ ，故

$$\dot{\mathbf{U}}_L = -\mathbf{B}_T \dot{\mathbf{U}}_T = \mathbf{Q}_L^T \dot{\mathbf{U}}_T \quad (2-11)$$

由此可以看出， $Y$  条支路中，只有  $n$  个树支电压是独立的，连支电压可由树支电压决定。将式(2-11)代入式(2-9)，得

$$\dot{\mathbf{U}}_B = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_T \\ \dot{\mathbf{U}}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_n \\ \mathbf{Q}_L^T \end{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_T = \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{U}}_T \quad (2-12)$$

可见支路电压也可从树支电压求得。

另外，支路电压与节点电压之间存在变换关系

$$\dot{\mathbf{U}}_B = \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{U}}_N \quad (2-13)$$

由于每条支路都只与两个节点关联，支路电压可表示为其两端节点电压之差。因此用节点电压可表示全部支路电压。

### 2.1.3 特勒根定理

特勒根定理是表征电网络拓扑性质的一个重要定理，它可以根据基尔霍夫电流定律和基尔霍夫电压定律得到证明。特勒根定理具有普遍性和应用灵活性的特点，迄今，它不仅运用于电网络，以简洁的途径论证某些已知的网络定理和发展新的分析、计算方法，而且已推广应用于其他物理系统。

特勒根定理指出：任意一个电力网络中所有支路上的电压与电流乘积的代数和为零。特勒根定理与元件的特性无关，即不论元件特性是线型的或是非线性的，有源的或是无源的，定常的或是时变的，它都成立。对于相量形式的电压与电流，有

$$\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{B}}^T \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{B}} = 0 \quad (2-14)$$

证明如下：

由于  $\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{B}} = \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{N}}$  及  $\mathbf{A} \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{B}} = 0$ ，则

$$\dot{\mathbf{U}}^T \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{B}} = (\mathbf{A}^T \dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{N}})^T \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{B}} = \dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{N}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{B}} = 0$$

上式表明网络给予各支路的功率是平衡的，即网络中各支路的功率总和恒为零，因此基尔霍夫定律是能量守恒定律的一种表现形式。

## 2.2 电力网络的基本方程

### 2.2.1 典型支路及其约束

如图 2-1 所示为一条一般支路  $k$ ，端点分别为  $i$  和  $j$ ，支路电流为  $\dot{I}_k$ ，支路电压为  $\dot{U}_k$ ，其电压降的正方向与  $\dot{I}_k$  的方向一致。它包含有电流源  $\dot{I}_{Sk}$ ；电压源  $\dot{U}_{Sk}$ ，其电压降的正方向与  $\dot{I}_k$  相反；支路参数可用支路阻抗  $z_k$  或支路导纳  $y_k$  来表示， $z_k = y_k^{-1}$ ；无源元件的电压与电流分别为  $\dot{U}_{Pk}$  和  $\dot{I}_{Pk}$ 。

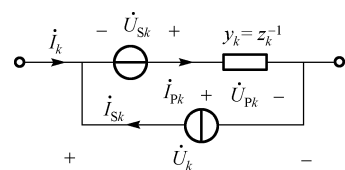


图 2-1 一般支路形式

元件的约束可用支路电压方程或支路电流方程表示：

$$\dot{U}_k = z_k \dot{I}_{Pk} - \dot{U}_{Sk} = z_k (\dot{I}_{Sk} + \dot{I}_k) - \dot{U}_{Sk} \quad (2-15)$$

$$\dot{I}_k = y_k \dot{U}_{Pk} - \dot{I}_{Sk} = y_k (\dot{U}_{Sk} + \dot{U}_k) - \dot{I}_{Sk} \quad (2-16)$$

把网络内所有的支路方程集合在一起，引入电压源向量和电流源向量

$$\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{S}} = [\dot{U}_{S1} \quad \cdots \quad \dot{U}_{Sk} \quad \cdots \quad \dot{U}_{Sb}]^T$$

$$\dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{S}} = [\dot{I}_{S1} \quad \cdots \quad \dot{I}_{Sk} \quad \cdots \quad \dot{I}_{Sb}]^T$$

存在  $b$  条支路，则支路电压、电流矩阵方程分别为

$$\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{B}} = \mathbf{z}_{\mathbf{B}} (\dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{S}} + \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{B}}) - \dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{S}} \quad (2-17)$$

$$\dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{B}} = \mathbf{y}_{\mathbf{B}} (\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{B}} + \dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{S}}) - \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{S}} \quad (2-18)$$

式中,  $z_B$  和  $y_B$  分别为原始阻抗矩阵和原始导纳矩阵, 是阶数等于网络支路数的方阵, 且二者互为逆矩阵

$$\begin{aligned} y_B &= \text{diag}[y_1 \quad \cdots \quad y_k \quad \cdots \quad y_b] \\ &= z_B^{-1} = \text{diag}[z_1^{-1} \quad \cdots \quad z_k^{-1} \quad \cdots \quad z_b^{-1}] \end{aligned} \quad (2-19)$$

### 2.2.2 节点电压方程

节点分析法以节点电压  $\dot{U}_N$  和节点注入电流  $\dot{I}_N$  为物理量。网络的支路特性约束为

$$y_B(\dot{U}_B + \dot{U}_S) = \dot{I}_B + \dot{I}_S$$

将上式两边同时左乘  $A$ , 考虑  $\dot{U}_B = A^T \dot{U}_N$ , 可得

$$Ay_B A^T \dot{U}_N + Ay_B \dot{U}_S = A\dot{I}_B + A\dot{I}_S \quad (2-20)$$

由于  $A\dot{I}_B = 0$ , 式 (2-20) 移项后为

$$Ay_B A^T \dot{U}_N = A(\dot{I}_S - y_B \dot{U}_S) \quad (2-21)$$

根据节点注入电流的定义

$$\dot{I}_N = A(\dot{I}_S - y_B \dot{U}_S) \quad (2-22)$$

将式 (2-22) 代入式 (2-21), 则节点网络方程表示为

$$Y\dot{U}_N = \dot{I}_N \quad (2-23)$$

其中

$$Y = Ay_B A^T \quad (2-24)$$

称为节点导纳矩阵。

节点导纳矩阵表示短路参数。在网络中节点  $i$  接单位电压源, 其余节点都短路接地, 此时流入节点  $i$  的电流数值上是  $Y_{ii}$ , 流入节点  $j$  的电流数值上是  $Y_{ij}$ , 如图 2-2 所示。

注意只有和节点  $i$  有支路相连的节点才有电流, 其余节点没有电流, 因为其余节点的相邻节点都是零电位点。这也可以说明导纳矩阵是稀疏矩阵。节点导纳矩阵的元素只包含了网络的局部信息, 例如某节点  $i$  自导纳和互导纳只包含和节点  $i$  相连的支路的导纳信息, 没有包含其余支路导纳的信息。

以地为参考节点的节点导纳矩阵  $Y$  是  $N \times N$  阶稀疏矩阵。如果网络中存在接地支路,  $Y$  是非奇异的, 其逆矩阵是节点阻抗矩阵, 为

$$Z = Y^{-1}$$

节点阻抗矩阵元素的物理意义: 当节点  $i$  注入单位电流, 其他节点均开路时, 节点  $i$  的电压数值上是  $Z_{ii}$ , 节点  $j$  的电压数值上是  $Z_{ij}$ , 节点阻抗矩阵元素代表开路参数。  $Z_{ii}$  称为节点  $i$  的自阻抗,  $Z_{ij}$  称为节点  $i$ 、 $j$  之间的互阻抗, 如图 2-3 所示。节点阻抗矩阵包含了全网的信息, 例如,  $Z_{ii}$  是全网元件等值到节点  $i$  和地组成的端口后的等值阻抗。

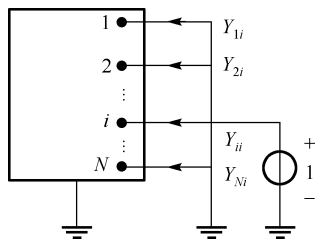


图 2-2 导纳矩阵元素物理意义的说明

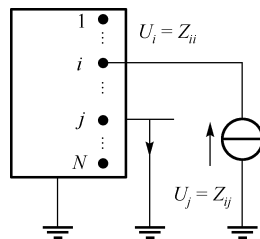


图 2-3 自阻抗和互阻抗

### 2.2.3 回路电流方程

回路电流法是以回路为求解变量，用回路电流表示各支路电压，然后对回路列 KVL 方程进行求解的方法。

回路分析法以回路电流  $\dot{\mathbf{I}}_L$  和回路电动势  $\dot{\mathbf{U}}_L$  为物理量。网络的支路特性约束为

$$\dot{\mathbf{U}}_B + \dot{\mathbf{U}}_S = \mathbf{z}_B(\dot{\mathbf{I}}_B + \dot{\mathbf{I}}_S)$$

网络的拓扑约束为

$$\mathbf{B}^T \dot{\mathbf{I}}_L = \dot{\mathbf{I}}_B \quad (\text{KCL})$$

$$\mathbf{B} \dot{\mathbf{U}}_B = 0 \quad (\text{KVL})$$

由以上三个公式可得

$$\mathbf{B} \mathbf{z}_B \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{I}}_L = \mathbf{B}(\dot{\mathbf{U}}_S - \mathbf{z}_B \dot{\mathbf{I}}_S) \quad (2-25)$$

定义回路电动势

$$\dot{\mathbf{E}}_L = \mathbf{B}(\dot{\mathbf{E}}_S - \mathbf{z}_B \dot{\mathbf{I}}_S) \quad (2-26)$$

从而得到回路网络方程为

$$\mathbf{Z}_L \dot{\mathbf{I}}_L = \dot{\mathbf{E}}_L \quad (2-27)$$

其中

$$\mathbf{Z}_L = \mathbf{B} \mathbf{z}_B \mathbf{B}^T \quad (2-28)$$

称为回路阻抗矩阵。同样可以表示为导纳的形式为

$$\mathbf{Y}_L \dot{\mathbf{E}}_L = \dot{\mathbf{I}}_L \quad (2-29)$$

其中

$$\mathbf{Y}_L = \mathbf{Z}_L^{-1} \quad (2-30)$$

称为回路导纳矩阵。

### 2.2.4 割集电压方程

割集分析法也称为树支电压分析法，对于一个具有  $b$  条支路， $n$  个独立节点的网络，任意选取树都有  $n$  个树支电压是独立和完备的网络变量。

割集分析法，以割集电压  $\dot{\mathbf{U}}_T$  和割集注入电流（源） $\dot{\mathbf{I}}_T$  为物理量，网络参数以导纳表示，

可写出网络的支路特性约束和网络的拓扑约束如下：

$$\mathbf{y}_B(\dot{\mathbf{U}}_B + \dot{\mathbf{E}}_S) = \dot{\mathbf{I}}_B + \dot{\mathbf{I}}_S$$

$$\mathbf{Q}\dot{\mathbf{I}}_B = \mathbf{0} \quad (\text{KCL})$$

$$\mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{U}}_T = \dot{\mathbf{U}}_B \quad (\text{KVL})$$

利用以上三个公式有

$$\mathbf{Q}\mathbf{y}_B\mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{U}}_T = \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{I}}_S - \mathbf{y}_B\dot{\mathbf{E}}_S)$$

将支路电压源换成支路电流源，再引入割集注入电流源  $\dot{\mathbf{I}}_T$ ，将支路电流源换成割集电流源，得

$$\mathbf{Q}(\dot{\mathbf{I}}_S - \mathbf{y}_B\dot{\mathbf{E}}_S) = \dot{\mathbf{I}}_T \quad (2-31)$$

从而得到割集网络方程

$$\mathbf{Y}_Q\dot{\mathbf{U}}_T = \dot{\mathbf{I}}_T \quad (2-32)$$

式中

$$\mathbf{Y}_Q = \mathbf{Q}\mathbf{y}_B\mathbf{Q}^T \quad (2-33)$$

为割集导纳矩阵。

## 2.2.5 路径电流方程

除了 2.2.4 小节介绍的回路分析法是求解电力网络的一般方法外，若网络接近树支状，例如，回路数很少的低压电网，则基于路径的回路分析法有其特殊的优势。

对回路数很少的低压电网，则基于路径的回路分析法有其特殊的优势。设网络中节点的注入电流为  $\dot{\mathbf{I}}_N$ ，对于选定的一棵树，支路特性约束为

$$\dot{\mathbf{U}}_B = \mathbf{z}_B\dot{\mathbf{I}}_B \quad (2-34)$$

定义节点的注入电流为  $\dot{\mathbf{I}}_N$ ，支路电流为  $\dot{\mathbf{I}}_B$ ，连支电流为  $\dot{\mathbf{I}}_L$ ，则 KCL 可以表示为

$$\dot{\mathbf{I}}_B = \mathbf{B}^T\dot{\mathbf{I}}_L + \mathbf{P}^T\dot{\mathbf{I}}_N \quad (2-35)$$

上式表明支路电流由两部分组成：一是节点注入电流  $\dot{\mathbf{I}}_N$  对路径上的支路的贡献，二是回路电流对回路上支路的贡献。在没有连支或连支电流为零的条件下，则有

$$\dot{\mathbf{I}}_B = \mathbf{P}^T\dot{\mathbf{I}}_N \quad (2-36)$$

这就是采用路径矩阵描述的 KCL 定律，在回路分析法中得到广泛应用。

综合式 (2-25)、式 (2-26) 以及式 (2-7)，可得

$$\mathbf{B}\mathbf{z}_B\mathbf{B}^T\dot{\mathbf{I}}_L = -\mathbf{B}\mathbf{z}_B\mathbf{P}^T\dot{\mathbf{I}}_N$$

结合回路阻抗矩阵的定义有

$$\dot{\mathbf{I}}_L = -\mathbf{Z}_L^{-1}\mathbf{B}\mathbf{z}_B\mathbf{P}^T\dot{\mathbf{I}}_N \quad (2-37)$$

将其代入式 (2-26) 有

$$\dot{\mathbf{I}}_{\text{B}} = (\mathbf{P}^{\text{T}} - \mathbf{B}^{\text{T}} \mathbf{Z}_{\text{L}}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{z}_{\text{B}} \mathbf{P}^{\text{T}}) \dot{\mathbf{I}}_{\text{N}} \quad (2-38)$$

定义

$$\dot{\mathbf{I}}'_{\text{B}} = \mathbf{P}^{\text{T}} \dot{\mathbf{I}}_{\text{N}}, \quad \dot{\mathbf{I}}''_{\text{B}} = -\mathbf{B}^{\text{T}} \mathbf{Z}_{\text{L}}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{z}_{\text{B}} \mathbf{P}^{\text{T}} \dot{\mathbf{I}}_{\text{N}}$$

则式 (2-38) 可写作

$$\dot{\mathbf{I}}_{\text{B}} = \dot{\mathbf{I}}'_{\text{B}} + \dot{\mathbf{I}}''_{\text{B}}$$

其中,  $\dot{\mathbf{I}}'_{\text{B}}$  为节点注入电流在树支支路上的贡献;  $\dot{\mathbf{I}}''_{\text{B}}$  为回路电流的贡献。

对于特殊的无环路的辐射网, 网络本身就是一棵树。由式 (1-63) 可知, 关联矩阵  $\mathbf{A}$  和路径矩阵  $\mathbf{P}$  都是可逆方阵, 网络方程的求解可以简化为下面两步:

① 利用式 (2-38) 求支路电流的前推过程 (此时无回路电流)

$$\dot{\mathbf{I}}_{\text{B}} = \mathbf{P}^{\text{T}} \dot{\mathbf{I}}_{\text{N}} \quad (2-39)$$

② 用式 (2-13) 和式 (1-62) 可得求节点电压的回代过程

$$\dot{\mathbf{U}}_{\text{N}} = \mathbf{A}^{-\text{T}} \mathbf{U}_{\text{B}} = \mathbf{P} \mathbf{Z}_{\text{B}} \dot{\mathbf{I}}_{\text{B}} \quad (2-40)$$

这也是求解辐射网潮流的前推回代法的理论基础。

式 (2-39) 表达了节点注入电流在树支支路上的分布; 式 (2-40) 表达了用支路电流计算支路电压, 进而计算节点电压的过程。

## 2.3 电力网络的特殊支路

本节主要利用节点导纳矩阵或回路阻抗矩阵对电力网络中的一些特殊支路进行描述。

### 2.3.1 变压器支路

#### 1. 单理想变压器支路

在第 1 章介绍变压器模型时曾提到变压器的移相功能无法用  $\Pi$  形等值电路表示, 本小节则从电力网络矩阵方程的角度来描述完整的变压器支路。

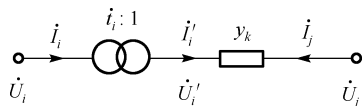


图 2-4 单理想变压器支路

如图 2-4 所示,  $k$  为节点  $i$ 、 $j$  之间的一条变压器支路。将变压器阻抗写成导纳的形式为  $y_k$ , 变比为

$\dot{t}_i = t_i \angle \delta_i$ , 其中  $t_i$  为  $\dot{t}_i$  的模值,  $\delta_i$  为移相角度。

根据功率守恒, 电压、电流满足

$$\begin{cases} \dot{U}_i = \dot{t}_i \dot{U}'_i \\ \dot{I}_i = \frac{1}{\dot{t}_i} \dot{I}'_i \end{cases} \quad (2-41)$$

结合式 (2-41), 由图可得:

$$\begin{cases} \dot{I}_i = y_k \left( \frac{1}{\dot{t}_i} \dot{U}_i - \frac{1}{\dot{t}_i} \dot{U}_j \right) \\ \dot{I}_j = y_k \left( -\frac{1}{\dot{t}_i} \dot{U}_i + \dot{U}_j \right) \end{cases} \quad (2-42)$$



写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_i \\ \dot{I}_j \end{bmatrix} = y_k \begin{bmatrix} \frac{1}{\dot{t}_i^2} & -\frac{1}{\dot{t}_i} \\ -\frac{1}{\dot{t}_i} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_i \\ \dot{U}_j \end{bmatrix} \quad (2-43)$$

则该支路的节点导纳矩阵为

$$\mathbf{Y}_k = y_k \begin{bmatrix} \frac{1}{\dot{t}_i^2} & -\frac{1}{\dot{t}_i} \\ -\frac{1}{\dot{t}_i} & 1 \end{bmatrix} \quad (2-44)$$

## 2. 双理想变压器支路

接下来分析一个支路含有两台理想变压器的情况,如图 2-5 所示,支路  $k$  上左右两台变压器变比分别为  $\dot{t}_i$  和  $\dot{t}_j$ 。

类似式 (2-41), 右侧理想变压器的电压、电流关系为

$$\begin{cases} \dot{U}_j = \dot{t}_j \dot{U}'_j \\ \dot{I}_j = \frac{1}{\dot{t}_j} \dot{I}'_j \end{cases}$$

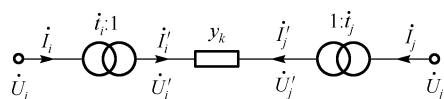


图 2-5 双理想变压器支路

由图 2-5 可知

$$\dot{I}'_i = -\dot{I}'_j = \frac{1}{Z_k} (\dot{U}'_i - \dot{U}'_j) = \frac{1}{Z_k} \left( \frac{1}{\dot{t}_i} \dot{U}_i - \frac{1}{\dot{t}_j} \dot{U}_j \right)$$

则

$$\begin{cases} \dot{I}_i = \frac{1}{\dot{t}_i} \dot{I}'_i = y_k \left( \frac{1}{\dot{t}_i^2} \dot{U}_i - \frac{1}{\dot{t}_i \dot{t}_j} \dot{U}_j \right) \\ \dot{I}_j = -\frac{1}{\dot{t}_j} \dot{I}'_i = y_k \left( -\frac{1}{\dot{t}_i \dot{t}_j} \dot{U}_i + \frac{1}{\dot{t}_j^2} \dot{U}_j \right) \end{cases} \quad (2-45)$$

该支路的节点导纳矩阵为

$$\mathbf{Y}_k = y_k \begin{bmatrix} \frac{1}{\dot{t}_i^2} & -\frac{1}{\dot{t}_i \dot{t}_j} \\ -\frac{1}{\dot{t}_i \dot{t}_j} & \frac{1}{\dot{t}_j^2} \end{bmatrix} \quad (2-46)$$

类比节点导纳矩阵表达式  $\mathbf{Y} = \mathbf{A} \mathbf{y}_B \mathbf{A}^T$ , 引入广义关联矩阵  $\dot{\mathbf{A}}$ , 对于双理想变压器支路  $k$ , 令

$$\dot{\mathbf{A}}_k \mathbf{y}_k \dot{\mathbf{A}}_k^T = \mathbf{Y}_k = \mathbf{y}_k \begin{bmatrix} \frac{1}{t_i^2} & -\frac{1}{t_i t_j} \\ -\frac{1}{t_i t_j} & \frac{1}{t_j^2} \end{bmatrix} \quad (2-47)$$

那么

$$\dot{\mathbf{A}}_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{t_i} & -\frac{1}{t_j} \end{bmatrix}^T \quad (2-48)$$

当  $t_j=1$  时, 即该支路退化为单理想变压器支路形式; 若  $t_i$  和  $t_j$  都等于 1, 那该支路退化为不含变压器的普通支路。因此, 形成关联矩阵过程中, 式 (2-48) 可作为电力网络基本支路  $k$  的通式, 普通支路可以看做变比等于 1 的特殊形式。

### 2.3.2 受控源支路

受控源又称“非独立”电源, 是状态受其他双端元件控制的无源双端元件。受控电压源的激励电压或受控电流源的激励电流与独立电压源的激励电压或独立电流源的激励电流有所不同, 后者是独立量, 前者则受电路中某部分电压或电流控制。

受控电压源或受控电流源视控制量是电压或电流可分为电压控制电流源 (VCCS)、电流控制电流源 (CCCS)、电压控制电压源 (VCVS)、电流控制电压源 (CCVS)。这四种受控源的图形符号如图 2-6 所示。为了与独立电源相区别, 用菱形符号表示其电源部分。图中  $\dot{U}_k$  和  $\dot{I}_k$  分别表示控制电压和控制电流,  $g$ 、 $\beta$ 、 $\mu$  和  $\gamma$  分别是有关的控制系数, 其中  $\mu$  和  $\beta$  是量纲为 1 的量,  $\gamma$  和  $g$  分别具有电阻和电导的量纲。这些系数为常数时, 被控制量和控制量成正比, 这种受控源称为线性受控源。本书只考虑线性受控源, 故将“线性”二字略去。

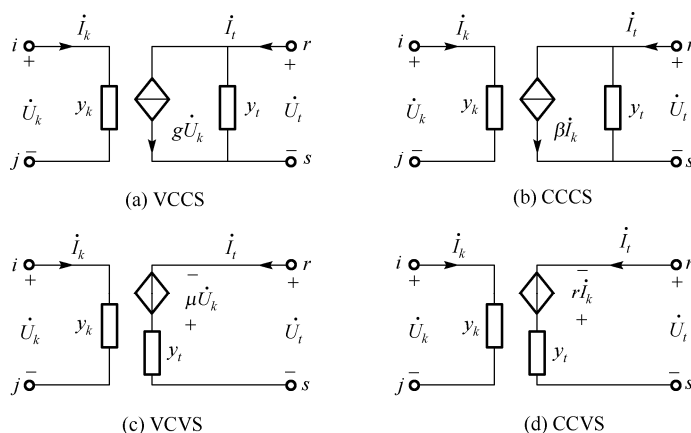


图 2-6 受控电源

图 2-6 中受控源被表示为具有四个端子的电路模型, 其中受控电压源或受控电流源具有一对端子, 另一对控制端子对应于控制量是电压或电流。

独立电源是电路中的“输入”, 它表示外界对电路的作用, 电路中电压或电流是由于独立

电源起的“激励”作用产生的。受控源则不同，它是用来反映电路中某处的电压或电流能控制另一处的电压或电流的现象，或表示一处的电路变量与另一处电路变量之间的一种耦合关系。在求解具有受控源的电路时，可以把受控电压（电流）源作为电压（电流）源处理，但必须注意其激励电压（电流）是取决于控制量的。

接下来针对以上四种受控源形式，分析其电力网络矩阵的表达形式。

### 1. 电压控制电流源（VCCS）

如图 2-6(a)所示，对应控制支路  $k$ 、受控支路  $t$ ，支路电流有

$$\begin{cases} \dot{I}_k = y_k \dot{U}_k \\ \dot{I}_t = y_t \dot{U}_t + g \dot{U}_k \end{cases} \quad (2-49)$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_k \\ \dot{I}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_k & 0 \\ g & y_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_k \\ \dot{U}_t \end{bmatrix} \quad (2-50)$$

其原始导纳矩阵为

$$\mathbf{y}_B = \mathbf{y}_{B0} + \Delta \mathbf{y}_B = \begin{bmatrix} y_k & 0 \\ 0 & y_t \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{bmatrix}}^{\substack{\text{控制} \\ k \quad t}} \begin{matrix} k \\ t \end{matrix} \quad (2-51)$$

式中， $\mathbf{y}_{B0}$  为支路  $k$ 、 $t$  无受控源时的原始导纳矩阵， $\Delta \mathbf{y}_B$  为受控源所增加的部分。可以看出， $\Delta \mathbf{y}_B$  的列对应控制支路，而行对应受控支路，由于图 2-6(a)反映的是支路  $k$  电压  $\dot{U}_k$  对支路  $t$  电流  $\dot{I}_t$  的控制增量  $g \dot{U}_k$ ，因此  $\Delta \mathbf{y}_B$  仅包含一个非零元素，位于第  $t$  行第  $k$  列，其值为  $g$ 。

其关联矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} k & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} i \\ j \\ r \\ s \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2-52)$$

则对应节点导纳矩阵的增量

$$\Delta \mathbf{Y} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{y}_B \mathbf{A}^T = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ g & -g & 0 & 0 \\ -g & g & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{\substack{\text{控} & \text{制} \\ i & j & r & s}} \begin{matrix} i \\ j \\ r \\ s \end{matrix} \quad (2-53)$$

可以将含受控源支路的节点导纳矩阵写成原始节点导纳矩阵  $\mathbf{Y}_0$  与增量之和的形式, 即

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0 + \Delta \mathbf{Y}$$

## 2. 电流控制电流源 (CCCS)

如图 2-6(b)所示, 支路电流有

$$\begin{cases} \dot{I}_k = y_k \dot{U}_k \\ \dot{I}_t = y_t \dot{U}_t + \beta \dot{I}_k = y_t \dot{U}_t + \beta y_k \dot{U}_k \end{cases} \quad (2-54)$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_k \\ \dot{I}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_k & 0 \\ \beta y_k & y_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_k \\ \dot{U}_t \end{bmatrix} \quad (2-55)$$

其原始导纳矩阵为

$$\mathbf{y}_B = \mathbf{y}_{B0} + \Delta \mathbf{y}_B = \begin{bmatrix} y_k & 0 \\ 0 & y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta y_k & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{控制} \\ k \quad t \end{matrix} \quad (2-56)$$

可以看出,  $\Delta \mathbf{y}_B$  的列对应控制支路, 而行对应受控支路, 由于图 2-6(b)反映的是支路  $k$  电流  $y_k \dot{U}_k$  对支路  $t$  电流  $\dot{I}_t$  的控制增量  $\beta y_k \dot{U}_k$ , 因此  $\Delta \mathbf{y}_B$  仅包含一个非零元素, 位于第  $t$  行第  $N$  列, 其值为  $\beta y_k$ 。

对应的节点导纳矩阵增量为

$$\Delta \mathbf{Y} = \begin{matrix} & \overbrace{\begin{matrix} i & j & r & s \end{matrix}}^{\text{控制}} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta y_k & -\beta y_k & 0 & 0 \\ -\beta y_k & \beta y_k & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} i \\ j \\ r \\ s \end{matrix} \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta y_k & -\beta y_k & 0 & 0 \\ -\beta y_k & \beta y_k & 0 & 0 \end{bmatrix}} \right\} \text{受控} \quad (2-57)$$

## 3. 电压控制电压源 (VCVS)

如图 2-6(c)所示, 支路电流有

$$\begin{cases} \dot{I}_k = y_k \dot{U}_k \\ \dot{I}_t = y_t (\dot{U}_t + \mu \dot{U}_k) = y_t \dot{U}_t + \mu y_t \dot{U}_k \end{cases} \quad (2-58)$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_k \\ \dot{I}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_k & 0 \\ \mu y_t & y_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_k \\ \dot{U}_t \end{bmatrix} \quad (2-59)$$

其原始导纳矩阵为

$$\mathbf{y}_B = \mathbf{y}_{B0} + \Delta \mathbf{y}_B = \begin{bmatrix} y_k & 0 \\ 0 & y_t \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mu y_t & 0 \end{bmatrix}}^{\substack{\text{控制} \\ k \quad t}} \begin{bmatrix} k \\ t \end{bmatrix} \left\{ \text{控制} \right. \quad (2-60)$$

可以看出,  $\Delta \mathbf{y}_B$  的列对应控制支路, 而行对应受控支路, 由于图 2-6(c)反映的是支路  $k$  电压  $\dot{U}_k$  对支路  $t$  电压  $\dot{U}_t$  的控制增量  $\mu \dot{U}_k$ , 相当于在支路  $t$  中增加了一个受控电流源  $\mu y_t \dot{U}_k$ , 因此  $\Delta \mathbf{y}_B$  仅包含一个非零元素, 位于第  $p$  行第  $k$  列, 其值为  $\mu y_t$ 。

对应的节点导纳矩阵增量为

$$\Delta \mathbf{Y} = \begin{matrix} & \overbrace{\begin{matrix} i & j & r & s \end{matrix}}^{\text{控制}} \\ \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu y_t & -\mu y_t & 0 & 0 \\ -\mu y_t & \mu y_t & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} i \\ j \\ r \\ s \end{matrix} \right\} & \text{受控} \end{matrix} \quad (2-61)$$

#### 4. C CVS

如图 2-6(d)所示, 支路电流有

$$\begin{cases} \dot{I}_k = y_k \dot{U}_k \\ \dot{I}_t = y_t (\dot{U}_t + r \dot{I}_k) = y_t \dot{U}_t + y_t r y_k \dot{U}_k \end{cases} \quad (2-62)$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_k \\ \dot{I}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_k & 0 \\ y_t r y_k & y_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_k \\ \dot{U}_t \end{bmatrix} \quad (2-63)$$

其原始导纳矩阵为

$$\mathbf{y}_B = \mathbf{y}_{B0} + \Delta \mathbf{y}_B = \begin{bmatrix} y_k & 0 \\ 0 & y_t \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r y_t y_k & 0 \end{bmatrix}}^{\substack{\text{控制} \\ k \quad t}} \begin{bmatrix} k \\ t \end{bmatrix} \left\{ \text{受控} \right. \quad (2-64)$$

可以看出,  $\Delta \mathbf{y}_B$  的列对应控制支路, 而行对应受控支路, 由于图 2-6(d)反映的是支路  $k$  电流  $\dot{I}_k$  对支路  $t$  电压  $\dot{U}_t$  的控制增量  $r \dot{I}_k$ , 相当于在支路  $p$  中增加了一个受控电流源  $r y_t y_k \dot{U}_k$ , 因此  $\Delta \mathbf{y}_B$  仅包含一个非零元素, 位于第  $k$  行第  $t$  列, 其值为  $r y_t y_k$ 。

对应的节点导纳矩阵增量为

$$\Delta \mathbf{Y} = \begin{matrix} & \overbrace{\begin{matrix} i & j & r & s \end{matrix}}^{\text{控制}} \\ \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ r y_t y_k & -r y_t y_k & 0 & 0 \\ -r y_t y_k & r y_t y_k & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} i \\ j \\ r \\ s \end{matrix} \right\} & \text{受控} \end{matrix} \quad (2-65)$$

综合以上分析, 四种受控源支路的原始导纳矩阵增量为受控支路所在行与控制支路所在列对应的一个元素, 其值为 $\alpha$ 。针对不同类型的受控源,  $\alpha$ 具有不同的形式:

$$\alpha = \begin{cases} g & \text{VCCS} \\ \beta y_k & \text{CCCS} \\ \mu y_t & \text{VCVS} \\ r y_t y_k & \text{CCVS} \end{cases} \quad (2-66)$$

同理, 对于节点导纳矩阵增量而言, 仅在受控支路的节点所在行与控制支路的节点所在列存在非零元素 $\pm\alpha$ , 当节点注入电流参考方向相同时取正, 相反时取负。

### 2.3.3 电感耦合支路

电感耦合支路主要用于表征同塔双回线路之间或不换位线路三相之间存在的磁耦合现象。本节主要探讨两条支路之间电感耦合情况, 以及对原有节点导纳矩阵的修正方法。

设支路 $k$ 与支路 $t$ 存在电感耦合关系, 其同名端与参考方向如图 2-7 所示, 则支路电压可表示为

$$\begin{cases} \dot{U}_k = z_k(\dot{I}_k + \dot{I}_{sk}) + j\omega M(\dot{I}_t + \dot{I}_{st}) - \dot{U}_{sk} \\ \dot{U}_t = z_t(\dot{I}_t + \dot{I}_{st}) + j\omega M(\dot{I}_k + \dot{I}_{sk}) - \dot{U}_{st} \end{cases} \quad (2-67)$$

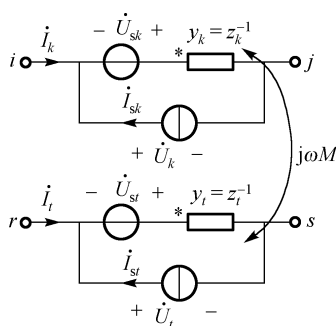


图 2-7 电感耦合支路

由式 (2-67) 可得用阻抗表示的节点网络方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_k \\ \dot{U}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_k & j\omega M \\ j\omega M & z_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_k + \dot{I}_{sk} \\ \dot{I}_t + \dot{I}_{st} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{U}_{sk} \\ \dot{U}_{st} \end{bmatrix} \quad (2-68)$$

原始导纳矩阵满足

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_B = \mathbf{z}_B^{-1} &= \begin{bmatrix} z_k & j\omega M \\ j\omega M & z_t \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{z_k z_t + \omega^2 M^2} \begin{bmatrix} z_t & -j\omega M \\ -j\omega M & z_k \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{1 + \omega^2 M^2 y_k y_t} \begin{bmatrix} y_k & -j\omega M y_k y_t \\ -j\omega M y_k y_t & y_t \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-69)$$

将式 (2-69) 分解成两部分

$$\mathbf{y}_B = \mathbf{y}_{B0} + \Delta \mathbf{y}_B = \begin{bmatrix} y_k & 0 \\ 0 & y_t \end{bmatrix} + \frac{-\omega^2 M^2 y_k y_t}{1 + \omega^2 M^2 y_k y_t} \begin{bmatrix} y_k & j\frac{1}{\omega M} \\ j\frac{1}{\omega M} & y_t \end{bmatrix} \quad (2-70)$$

其中  $\mathbf{y}_{B0}$  为支路  $k$ 、 $t$  不存在耦合关系时的原始导纳矩阵,  $\Delta \mathbf{y}_B$  为存在耦合关系时原始导纳矩阵的增量, 则支路电流方程可写作

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_k \\ \dot{I}_t \end{bmatrix} = (\mathbf{y}_{B0} + \Delta \mathbf{y}_B) \begin{bmatrix} \dot{U}_k \\ \dot{U}_t \end{bmatrix} + (\mathbf{y}_{B0} + \Delta \mathbf{y}_B) \begin{bmatrix} \dot{U}_{sk} \\ \dot{U}_{st} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{I}_{sk} \\ \dot{I}_{st} \end{bmatrix} \quad (2-71)$$

两边同时左乘关联矩阵  $\mathbf{A}$ , 其节点电压方程为

$$\mathbf{A}(\mathbf{y}_{B0} + \Delta \mathbf{y}_B) \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{U}}_N = \mathbf{A}(\dot{\mathbf{I}}_{SB} - \mathbf{y}_{B0} \dot{\mathbf{U}}_{SB}) - \mathbf{A} \Delta \mathbf{y}_B \dot{\mathbf{U}}_{SB} \quad (2-72)$$

或

$$(\mathbf{Y}_0 + \Delta \mathbf{Y}) \dot{\mathbf{U}}_N = \dot{\mathbf{I}}_{N0} + \Delta \dot{\mathbf{I}}_N \quad (2-73)$$

式中,  $\Delta \mathbf{Y}$  和  $\Delta \dot{\mathbf{I}}_N$  分别为节点导纳矩阵和节点注入电流的增量。对应支路  $k$ 、 $t$ , 关联矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} k & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} i \\ j \\ r \\ s \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

则节点导纳增量矩阵为

$$\Delta \mathbf{Y} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{y}_B \mathbf{A}^T = \frac{-\omega^2 M^2 y_k y_t}{1 + \omega^2 M^2 y_k y_t} \begin{matrix} & \begin{matrix} i & j & r & s \end{matrix} \\ \begin{matrix} i \\ j \\ r \\ s \end{matrix} & \begin{bmatrix} y_k & -y_k & j\frac{1}{\omega M} & -j\frac{1}{\omega M} \\ -y_k & y_k & -j\frac{1}{\omega M} & j\frac{1}{\omega M} \\ j\frac{1}{\omega M} & -j\frac{1}{\omega M} & y_t & -y_t \\ -j\frac{1}{\omega M} & j\frac{1}{\omega M} & -y_t & y_t \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2-74)$$

节点注入电流的增量矩阵为

$$\Delta \dot{\mathbf{I}}_N = -\mathbf{A} \Delta \mathbf{y}_B \dot{\mathbf{U}}_{SB} = \frac{\omega^2 M^2 y_k y_t}{1 + \omega^2 M^2 y_k y_t} \begin{matrix} & \begin{matrix} i & j & r & s \end{matrix} \\ \begin{matrix} i \\ j \\ r \\ s \end{matrix} & \begin{bmatrix} y_k \dot{U}_{sk} + j\frac{\dot{U}_{st}}{\omega M} \\ -y_k \dot{U}_{sk} - j\frac{\dot{U}_{st}}{\omega M} \\ y_t \dot{U}_{st} + j\frac{\dot{U}_{sk}}{\omega M} \\ -y_t \dot{U}_{st} - j\frac{\dot{U}_{sk}}{\omega M} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2-75)$$

## 2.4 电力网络矩阵方程的修改

### 2.4.1 支路导纳发生变化

两端节点是  $i$ 、 $j$  的支路  $k$ ，其导纳由  $y_k$  变为  $y'_k$ ，原来的节点导纳矩阵的结构不变，节点导纳矩阵中和该支路有关的四个元素的数值发生变化。

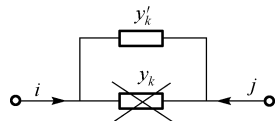


图 2-8 支路导纳发生变化

如图 2-8 所示，这种情况相当于在节点  $i$ 、 $j$  之间将导纳为  $y_k$  的支路移去，或者说在原支路  $k$  上并联一个  $-y_k$  的支路；然后再增加一条导纳为  $y'_k$  的支路。故原始导纳矩阵中第  $k$  个非零元素的增量

$$\Delta y_k = -y_k + y'_k \quad (2-76)$$

节点导纳矩阵的增量

$$\Delta Y = A_k \Delta y_k A_k^T \quad (2-77)$$

若仅仅除去一条支路  $y'_k = 0$ ，或仅增加一条支路  $y_k = 0$ ，则相当于  $y_k$  或  $y'_k$  等于零。

最终节点导纳矩阵表示为

$$Y' = Y + \Delta Y \quad (2-78)$$

对支路  $l$  移出的情况，当支路  $l$  是原网络中一连支时， $Y'$  仍保持非奇异性；当  $l$  是一孤立树枝，即其一个端点出线度是 1 时， $Y'$  中将有一行一列为零；当支路  $l$  是桥时，若支路  $l$  移去，由支路  $l$  连接的两个子网络解列， $Y'$  变成两个块对角矩阵。

**例 2-1** 如图 2-9 所示的电力网络，各支路导纳在图上标出。求：(1) 网络的导纳阵；(2) 如果 2—3 支路的导纳由  $j5$  变为  $j10$ ，导纳阵如何修改？

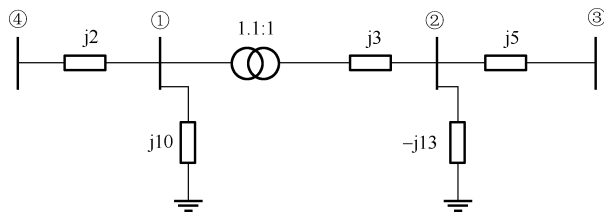


图 2-9 例 2-1 电力网络

**解：**(1) 根据变压器变比，可直接写出该网络的导纳阵

$$Y = \begin{bmatrix} j14.48 & -j2.73 & 0 & -j2 \\ -j2.73 & -j5 & -j5 & 0 \\ 0 & -j5 & j5 & 0 \\ -j2 & 0 & 0 & j2 \end{bmatrix}$$

(2) 若将 2—3 支路中的  $j5$  改为  $j10$ ，即支路并入一个  $j5$  的电阻

$$Y'_{22} = Y_{22} + y'_{23} - y_{23} = -j5 + j10 - j5 = 0$$

$$Y'_{33} = Y_{33} + y'_{23} - y_{23} = j5 + j10 - j5 = j10$$

$$Y'_{23} = Y_{23} + y'_{23} - y_{23} = -j5 + j5 - j10 = -j10$$



则修改后的导纳阵:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathrm{j}14.48 & -\mathrm{j}2.73 & 0 & -\mathrm{j}2 \\ -\mathrm{j}2.73 & 0 & -\mathrm{j}10 & 0 \\ 0 & -\mathrm{j}10 & \mathrm{j}10 & 0 \\ -\mathrm{j}2 & 0 & 0 & \mathrm{j}2 \end{bmatrix}$$

### 2.4.2 变压器变比发生变化

当变压器变比变化时, 节点导纳矩阵的结构不发生变化, 只是和该变压器支路有关的几个非零元素的数值发生变化。设变压器支路  $k$  两端的节点分别是  $i$  和  $j$ , 支路包含两台理想变压器, 变比分别由  $t_i$  和  $t_j$  变化为  $t'_i$  和  $t'_j$ , 新节点导纳矩阵同样可以用式 (2-78) 表示, 其增量为

$$\Delta \mathbf{Y} = y_k (\dot{\mathbf{A}}'_k \dot{\mathbf{A}}_k^{\mathrm{T}} - \dot{\mathbf{A}}_k \dot{\mathbf{A}}'^{\mathrm{T}}_k) = y_k \begin{bmatrix} -\frac{1}{t_i^2} + \frac{1}{t'^2_i} & \frac{1}{t_i t_j} - \frac{1}{t'_i t'_j} \\ \frac{1}{t_i t_j} - \frac{1}{t'_i t'_j} & -\frac{1}{t_j^2} + \frac{1}{t'^2_j} \end{bmatrix} \quad (2-79)$$

其中与节点  $i$ 、 $j$  有关的部分增量为

$$\begin{cases} \Delta Y_{ii} = y_k \left( -\frac{1}{t_i^2} + \frac{1}{t'^2_i} \right); & \Delta Y_{ij} = y_k \left( \frac{1}{t_i t_j} - \frac{1}{t'_i t'_j} \right) \\ \Delta Y_{ji} = y_k \left( \frac{1}{t_i t_j} - \frac{1}{t'_i t'_j} \right); & \Delta Y_{jj} = y_k \left( -\frac{1}{t_j^2} + \frac{1}{t'^2_j} \right) \end{cases} \quad (2-80)$$

### 2.4.3 增加节点

如图 2-10 所示, 设含有  $N$  个独立节点的网络。现新增一个节点  $p$  与网络中的节点相连, 其导纳为  $y_{ip}$ , 节点  $p$  的注入电流为  $\dot{I}_p$ 。

由于新增一个节点, 故节点导纳矩阵将增加一阶变为  $N+1$  阶的方阵。新节点电压方程可写作

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_N \\ \dot{I}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{Y}_p \\ \mathbf{Y}_p^{\mathrm{T}} & Y_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_N \\ \dot{U}_p \end{bmatrix}$$

其中  $\mathbf{Y}_p$  为  $N$  行的列向量, 其元素

$$Y_{ip} = \begin{cases} -y_{ip} & \text{节点 } i \text{ 与 } p \text{ 相连} \\ 0 & \text{节点 } i \text{ 与 } p \text{ 不相连} \end{cases} \quad (i=1, \dots, N) \quad (2-81)$$

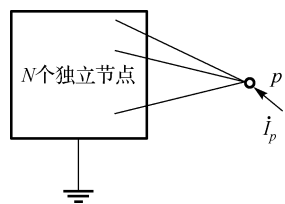


图 2-10 增加节点

### 2.4.4 消去节点

网络化简时常常要消去某个节点, 可以看作增加节点的逆操作。如图 2-11 所示, 设除去

待消节点  $p$  外网络共有  $N$  个独立节点, 将节点  $p$  排在后面, 则原节点电压方程可表示为式 (2-82) 的形式。

则

$$\begin{cases} \mathbf{Y}\dot{\mathbf{U}}_N + \mathbf{Y}_p\dot{\mathbf{U}}_p = \dot{\mathbf{I}}_N \\ \mathbf{Y}_p^T\dot{\mathbf{U}}_N + Y_{pp}\dot{\mathbf{U}}_p = \dot{I}_p \end{cases} \quad (2-82)$$

消去节点  $p$  后有

$$(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_p Y_{pp}^{-1} \mathbf{Y}_p^T) \dot{\mathbf{U}}_N = \dot{\mathbf{I}}_N - \mathbf{Y}_p Y_{pp}^{-1} \dot{I}_p \quad (2-83)$$

令

$$\begin{cases} \mathbf{Y}' = \mathbf{Y} - \Delta\mathbf{Y} = \mathbf{Y} - \mathbf{Y}_p Y_{pp}^{-1} \mathbf{Y}_p^T \\ \dot{\mathbf{I}}'_N = \dot{\mathbf{I}}_N - \Delta\dot{\mathbf{I}}_N = \dot{\mathbf{I}}_N - \mathbf{Y}_p Y_{pp}^{-1} \dot{I}_p \end{cases} \quad (2-84)$$

则

$$\mathbf{Y}'\dot{\mathbf{U}}_N = \dot{\mathbf{I}}'_N \quad (2-85)$$

新节点导纳矩阵和新节点注入电流的元素为

$$\begin{cases} Y'_{ij} = Y_{ij} - \frac{Y_{ip}Y_{pj}}{Y_{pp}} \\ \dot{I}'_i = \dot{I}_i - \frac{Y_{ip}\dot{I}_p}{Y_{pp}} \end{cases} \quad (2-86)$$

因此, 消去节点  $p$ , 只需对  $\mathbf{Y}$  阵中和  $p$  有支路直接相连的节点之间的元素进行修正, 其他节点之间的元素不用修正。当  $i, k$  都和  $p$  相连, 而消去前节点  $i, k$  间无支路时, 消去节点  $p$  将在  $Y_{ik}$  处产生注入元。应注意, 消去节点  $p$ , 导纳矩阵将降阶, 但不影响导纳矩阵的奇异性。

式 (2-83) 右端项  $-\mathbf{Y}_p Y_{pp}^{-1} \dot{I}_p$  是将节点  $p$  的电流移置到其相邻节点上的电流。当节点  $p$  无注入电流时  $\dot{I}_p = 0$ , 该节点为浮动节点, 消去该节点后其他节点的注入电流不变。

**例 2-2** 如图 2-12 所示, 所有支路导纳与注入电流都为 1, 求消去节点 4 后新节点导纳矩阵  $\mathbf{Y}'$  和新节点注入电流向量  $\dot{\mathbf{I}}'_N$ 。

**解:** 将节点 4 排在最后, 则原节点导纳矩阵为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_N & \mathbf{Y}_4 \\ \mathbf{Y}_4^T & Y_{44} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_1 + y_4 + y_6 & -y_1 & -y_6 & 0 \\ -y_1 & y_1 + y_2 + y_3 + y_8 & -y_2 & -y_8 \\ -y_6 & -y_2 & y_2 + y_5 + y_6 + y_7 & -y_7 \\ 0 & -y_8 & -y_7 & y_7 + y_8 + y_9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

原节点注入电流向量为

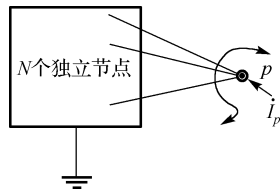


图 2-11 消去节点

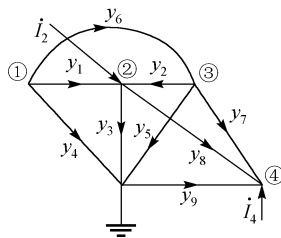


图 2-12 例 2-2

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_N \\ \dot{I}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{I}_2 & 0 & \dot{I}_4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

则新节点导纳矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}' &= \mathbf{Y}_N - \mathbf{Y}_4 \mathbf{Y}_{44}^{-1} \mathbf{Y}_4^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3.67 & -1.33 \\ -1 & -1.33 & 3.67 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

新节点注入电流向量为

$$\dot{I}'_N = \dot{I}_N - \mathbf{Y}_4 \mathbf{Y}_{44}^{-1} \dot{I}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.33 \\ 0.33 \end{bmatrix}$$

## 2.4.5 节点合并

双母线母联开关合上时, 两个节点合并为一个节点。这种情况相当于令两节点电压相等, 新节点注入电流等于原两个节点的注入电流之和。例如, 节点  $p$ 、 $q$  合并, 合并后节点称之为  $p$ , 此时网络方程降低一阶, 节点  $p$  新的节点电压与注入电流为

$$\dot{U}'_p = \dot{U}_p = \dot{U}_q \quad (2-87)$$

$$\dot{I}'_p = \dot{I}_p + \dot{I}_q \quad (2-88)$$

相应地应把导纳矩阵的第  $q$  行加到第  $p$  行上, 将第  $q$  列加到第  $p$  列上。节点合并不改变导纳阵的奇异性。

另外一个方法可以用在节点  $p$ ,  $q$  之间追加一个大导纳支路来模拟, 这个方法不改变导纳矩阵的阶次。

## 2.5 电力网络混合变量方程

在网络方程分析中, 有时需要写出导纳矩阵, 有时则要写出阻抗矩阵。某些元件只具有导纳参数, 如电压控制电流源。另一些元件却只具有阻抗参数, 如电流控制电压源。还有一些元件既不具有阻抗参数, 也不具有导纳参数, 如电压控制电流源, 其元件特性是用电压和电压的关系来表示的。如果网络中含有这类元件, 应用常规的分析方法会出现困难。混合变量法适用于含有这些元件的网络。

由于树支电压形成所有支路电压的一个基底集合, 用树支电压可以表示出网络中全部支路电压。连支电流形成所有支路电流的基底集合, 用连支电流可以表示出网络中全部支路电流。因此, 我们可以通过选树来选择一组独立的混合变量 (既有电流又有电压) 作为网络变量, 建立混合的元件支路特性约束方程, 以适应各类无源元件表达的需要。

按照如图 2-1 所表示的支路形式, 无源元件的电压、电流满足

$$\begin{aligned}\dot{U}_{pk} &= \dot{U}_{Sk} + \dot{U}_k \\ \dot{I}_{pk} &= \dot{I}_{Sk} + \dot{I}_k\end{aligned}$$

对于一个给定的网络，在选定一个适当的树后，按先树支后连支的顺序，为

$$\begin{aligned}\dot{U}_p &= [\dot{U}_{pT} \quad \dot{U}_{pL}]^T \\ \dot{I}_p &= [\dot{I}_{pT} \quad \dot{I}_{pL}]^T\end{aligned}$$

根据式 (2-6)，有

$$\mathbf{Q}\dot{\mathbf{I}}_p = [\mathbf{E}_n \quad \mathbf{Q}_L] \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_{pT} \\ \dot{\mathbf{I}}_{pL} \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{I}}_{pT} + \mathbf{Q}_L \dot{\mathbf{I}}_{pL} = \mathbf{Q}\dot{\mathbf{I}}_s \quad (2-89)$$

根据式 (2-10) 有

$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{U}}_p = [\mathbf{B}_T \quad \mathbf{E}_l] \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_{pT} \\ \dot{\mathbf{U}}_{pL} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_T \dot{\mathbf{U}}_{pT} + \dot{\mathbf{U}}_{pL} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{U}}_s \quad (2-90)$$

由于  $-\mathbf{B}_T = \mathbf{Q}_L^T$ ，则上式可写为

$$-\mathbf{Q}_L^T \dot{\mathbf{U}}_{pT} + \dot{\mathbf{U}}_{pL} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{U}}_s \quad (2-91)$$

设无源元件的混合变量支路特性约束方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{U}}_{pL} = \mathbf{z}_L \dot{\mathbf{I}}_{pL} + \mathbf{H}_{12} \dot{\mathbf{U}}_{pT} \\ \dot{\mathbf{I}}_{pT} = \mathbf{H}_{21} \dot{\mathbf{I}}_{pL} + \mathbf{y}_T \dot{\mathbf{U}}_{pT} \end{cases} \quad (2-92)$$

式中， $\mathbf{z}_L$  为连支阻抗矩阵， $\mathbf{y}_T$  为树支导纳矩阵， $\mathbf{H}_{12}$  中的元素具有电压比性质， $\mathbf{H}_{21}$  中的元素具有电流比性质，上式将网络中的连支电压与树支电流和树支电压的混合组合表示。

将式 (2-92) 代入式 (2-89) 和式 (2-91)，经整理后得

$$\begin{cases} \mathbf{y}_T \dot{\mathbf{U}}_{pT} + (\mathbf{H}_{21} + \mathbf{Q}_L) \dot{\mathbf{I}}_{pL} = \mathbf{Q}\dot{\mathbf{I}}_s \\ (\mathbf{H}_{12} - \mathbf{Q}_L^T) \dot{\mathbf{U}}_{pT} + \mathbf{z}_L \dot{\mathbf{I}}_{pL} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{U}}_s \end{cases} \quad (2-93)$$

将以上两式合为一个向量方程，得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_T & \mathbf{H}_{21} + \mathbf{Q} \\ \mathbf{H}_{12} - \mathbf{Q}_L^T & \mathbf{z}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_{pT} \\ \dot{\mathbf{I}}_{pL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}\dot{\mathbf{I}}_s \\ \mathbf{B}\dot{\mathbf{U}}_s \end{bmatrix} \quad (2-94)$$

上式表示一组以树支非源元件电压和连支非源元件电流作为网络变量的混合变量方程。网络变量数等于支路数。

当网络中不含多端元件时， $\mathbf{H}_{12} = \mathbf{H}_{21} = \mathbf{0}$ 。由于式 (2-94) 展开成两个独立的方程。将第二式代入第一式可得割集方程。将第一式代入第二式可得回路方程。

选择适当的树是列写混合变量方程的关键，由式 (2-92) 可看出，元件特性只具有导纳表示式的元件宜选作树支，只具有阻抗表示式的元件宜选为连支。R、L、C 元件具有阻抗和导纳两种表达式；CCVS 只具有阻抗表示式，它的两条支路必须均选为连支。VCCS 只有导纳表示式，它的两条支路必须均选成树支。对于理想变压器，其元件特性既不能用阻抗参数，也不能用导纳参数表示，而是具有两支路电压与电压，电流与电流之间的关系式，因此，应

任选两条支路之一为树支，另一为连支。VCCS 的两支路电压之间存在控制关系，故其一应为树支，另一应为连支。要能够写出  $\dot{\mathbf{U}}_{\text{PL}} = \mathbf{z}_L \dot{\mathbf{I}}_{\text{PL}} + \mathbf{H}_{12} \dot{\mathbf{U}}_{\text{PT}}$  形式的元件约束方程，必须把控制支路选为树支，受控支路选为连支。同理 CCCS 的控制支路应为连支，受控支路应为树支。

某些含两个（或两个以上）多端元件的网络有可能选不出满足上述要求的树，这种情况则不能列为网络的混合变量方程。

**例 2-3** 列写图 2-13(a)所示网络的混合变量方程。

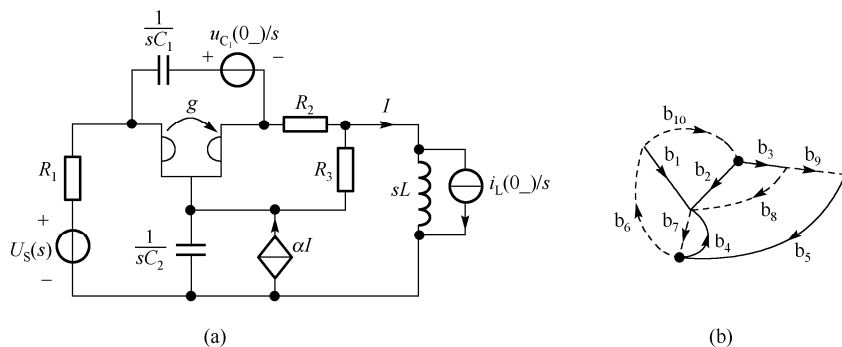


图 2-13 混合电力网络

**解：**作出图 2-13(a)所示网络的线形图，并选取支路  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$  为树支，如图 2-13(b)所示，图中粗实线表示树支。网络中 CCCS 的控制支路 ( $b_9$ ) 选为连支，受控支路 ( $b_4$ ) 选为树支。回转器两支路 ( $b_1, b_2$ ) 均选为树支。

由图 2-13(b)写出基本割集矩阵  $\mathbf{Q}$  和基本回路矩阵  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 & b_9 & b_{10} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-95)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由式 (2-95) 有

$$\mathbf{Q}_L = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

非源元件的混合变量 VCR 向量方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_6 \\ \dot{U}_7 \\ \dot{U}_8 \\ \dot{U}_9 \\ \dot{U}_{10} \\ \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{sC_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{sC_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{sL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_6 \\ \dot{I}_7 \\ \dot{I}_8 \\ \dot{I}_9 \\ \dot{I}_{10} \\ \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \\ \dot{U}_5 \end{bmatrix}$$

由上式有

$$Z_l = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{sC_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{sC_1} \end{bmatrix}, \quad H_{12} = 0,$$

$$H_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_t = \begin{bmatrix} 0 & g & 0 & 0 & 0 \\ -g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{sL} \end{bmatrix}$$

支路电流源向量和支路电压源向量分别为

$$\dot{I}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i_L(0_-)}{s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\dot{U}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_s & 0 & 0 & 0 & -\frac{u_{C_1}(0_-)}{s} \end{bmatrix}^T$$

$$H_{21} + \mathbf{Q}_L = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 + \partial & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_{21} - \mathbf{Q}_L^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}\dot{\mathbf{I}}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i_L(0_-)}{s} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{U}}_s = \begin{bmatrix} U_s & 0 & 0 & 0 & -\frac{u_{C_1}(0_-)}{s} \end{bmatrix}^T$$

由式 (2-94) 可得网络的混合变量方程

$$\left[ \begin{array}{ccccc|ccccc} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{sC_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{sC_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{sL} \end{array} \right] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \\ I_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{i_L(0_-)}{s} \\ U_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{u_{C_1}(0_-)}{s} \end{bmatrix}$$

# 电力网络等值变换

## 3.1 多射形与网形网络的变换

电网计算中经常要将某种连接方式的网络变换成另一种连接方式的网络，以便于网络元件的归并和化简。

### 3.1.1 星形变为三角形及负荷移置

首先写出图 3-1(a)用导纳表示的节点电压方程

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \vdots \\ \dot{I}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{p1} & 0 & 0 & | & -y_{p1} \\ 0 & y_{p2} & 0 & | & -y_{p2} \\ 0 & 0 & y_{p3} & | & -y_{p3} \\ \hline -y_{p1} & -y_{p2} & -y_{p3} & | & y_{p1} + y_{p2} + y_{p3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \vdots \\ \dot{U}_p \end{bmatrix} \quad (3-1)$$

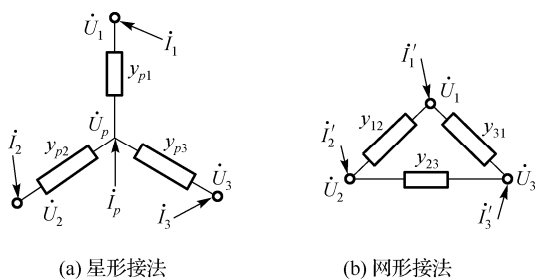


图 3-1 星形-网形变换示意图

采用 2.4.4 节中的方法消去节点  $p$ ，新的节点导纳矩阵为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Y}} &= \mathbf{Y} - \mathbf{Y}_p \mathbf{Y}_{pp}^{-1} \mathbf{Y}_p^T = \begin{bmatrix} y_{p1} & 0 & 0 \\ 0 & y_{p2} & 0 \\ 0 & 0 & y_{p3} \end{bmatrix} - \frac{1}{y_{\Sigma}} \begin{bmatrix} y_{p1}^2 & y_{p1}y_{p2} & y_{p1}y_{p3} \\ y_{p2}y_{p1} & y_{p2}^2 & y_{p2}y_{p3} \\ y_{p3}y_{p1} & y_{p2}y_{p3} & y_{p3}^2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{y_{\Sigma}} \begin{bmatrix} y_{p1}y_{p2} + y_{p1}y_{p3} & -y_{p1}y_{p2} & -y_{p1}y_{p3} \\ -y_{p2}y_{p1} & y_{p1}y_{p2} + y_{p2}y_{p3} & -y_{p2}y_{p3} \\ -y_{p3}y_{p1} & -y_{p2}y_{p3} & y_{p1}y_{p3} + y_{p2}y_{p3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-2)$$



其中  $y_{\Sigma} = y_{p1} + y_{p2} + y_{p3}$  为三条星形接法的支路导纳的并联值。

根据图 3-1(b)，变换后的节点导纳矩阵  $\tilde{\mathbf{Y}}$  可写作

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} y_{12} + y_{31} & -y_{12} & -y_{31} \\ -y_{12} & y_{12} + y_{23} & -y_{23} \\ -y_{31} & -y_{23} & y_{23} + y_{31} \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

对照式 (3-2) 与式 (3-3) 中的元素，可得

$$\begin{cases} y_{12} = \frac{y_{p1}y_{p2}}{y_{\Sigma}} \\ y_{31} = \frac{y_{p1}y_{p3}}{y_{\Sigma}} \\ y_{23} = \frac{y_{p2}y_{p3}}{y_{\Sigma}} \end{cases} \quad (3-4)$$

新的电流向量为

$$\dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{N}} = \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{N}} - \Delta \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{N}} = \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{N}} - \mathbf{Y}_p \mathbf{Y}_{pp}^{-1} \dot{\mathbf{I}}_p = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} + \frac{\dot{I}_p}{y_{\Sigma}} \begin{bmatrix} y_{p1} \\ y_{p2} \\ y_{p3} \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

其中  $\Delta \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{N}}$  是星形接法的中心点上电流  $\dot{I}_p$  在其余三个节点上的移置电流。式中， $\dot{I}_p / y_{\Sigma}$  是中心点  $p$  上的电流在自导纳上产生的电压降，再乘以  $y_{pi} (i=1,2,3)$  是在各并联支路上流过的电流。由此可见， $y_{pi}$  越大，移置到节点  $i$  上的电流也越大，并且三个节点上的移置电流之和应等于星形连接点  $p$  上的电流  $\dot{I}_p$ 。

### 3.1.2 多射形变为网形及负荷移置

设多射形网络中间节点为  $p$ ，其与  $n$  个节点相连，节点  $i$  与节点  $p$  之间的导纳为  $y_{pi} (i=1,2,\dots,n)$ ，则节点导纳矩阵为

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_n \\ \dot{I}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{p1} & & & & \\ & y_{p2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -y_{pn} & -y_{pn} \\ -y_{p1} & -y_{p2} & \cdots & -y_{pn} & y_{\Sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \vdots \\ \dot{U}_n \\ \dot{U}_p \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

其中

$$y_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n y_{pi} \quad (3-7)$$

消去节点  $p$ ，推广上一小节得到的结论，则新网络节点  $i$ 、 $j$  之间的导纳为

$$y_{ij} = \frac{y_{pi}y_{pj}}{y_{\Sigma}} \quad (i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,n; i \neq j) \quad (3-8)$$

移置电流

$$\Delta \dot{I}_n = - \begin{bmatrix} y_{p1} \\ y_{p2} \\ \vdots \\ y_{pn} \end{bmatrix} \frac{\dot{I}_p}{y_\Sigma} \quad (3-9)$$

并有

$$\dot{\tilde{I}}_N = \dot{I}_N - \Delta \dot{I}_N \quad (3-10)$$

## 3.2 诺顿等值与戴维南等值

对于电力系统网络，有时需要研究从该网络的某一端口看进去该网络的表现，常常从该端口向电力系统网络看进去，把该电力系统网络在端口处看成一个等值的电流源，或者看作一个等值电压源。为了保证等值正确，要求对等值和不等值两种情况从端口向网络看进去的表现是一样的，这就是常规的诺顿等值和戴维南等值的作法。

应用诺顿等值和戴维南等值对网络进行化简，需要满足两个条件：①被观察的网络是线性的；②每个端口上的净流入电流为零，即要求每个端口所连接的外部电路与被观察网络没有电磁耦合，各个端口所连接的外部电路之间也没有电气耦合。

### 3.2.1 单端口诺顿等值和戴维南等值

如图 3-2(a)所示的网络共有  $n+1$  个独立节点，现只对节点  $p$  与参考节点构成的端口感兴趣，其中  $\dot{U}$ 、 $\dot{I}$  为端口电压、电流，可将其转换为图 3-2(b)诺顿等值或图 3-2(c)戴维南等值的形式。

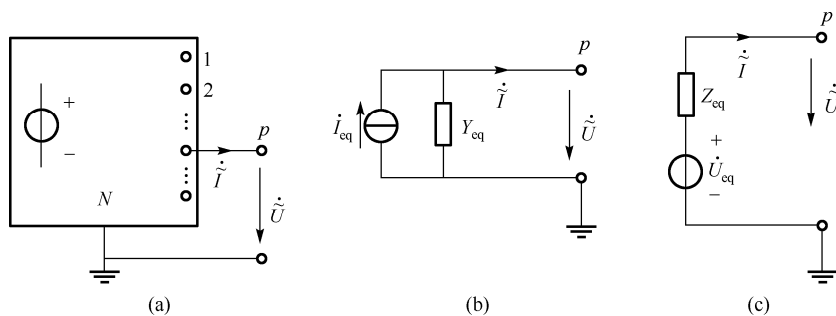


图 3-2 单端口网络

将节点  $p$  排在最后，将原始网络约束方程写成分块形式，用节点导纳表示：

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_N \\ \dot{I}_p - \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_N & \mathbf{Y}_{Np} \\ \mathbf{Y}_{Np}^T & Y_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_N \\ \dot{U} \end{bmatrix} \quad (3-11)$$

消去电压向量  $\dot{U}_N$ ，可列出关于节点  $p$  的约束方程：

$$\dot{\tilde{I}} = \dot{I}_p - \mathbf{Y}_{Np}^T \mathbf{Y}_N^{-1} \dot{\mathbf{I}}_N - (\mathbf{Y}_{pp} - \mathbf{Y}_{Np}^T \mathbf{Y}_N^{-1} \mathbf{Y}_{Np}) \dot{\tilde{U}} \quad (3-12)$$

令等值导纳  $Y_{eq}$  与等值电流  $\dot{I}_{eq}$  为

$$\begin{cases} Y_{eq} = Y_{pp} - \mathbf{Y}_{Np}^T \mathbf{Y}_N^{-1} \mathbf{Y}_{Np} \\ \dot{I}_{eq} = \dot{I}_p - \mathbf{Y}_{Np}^T \mathbf{Y}_N^{-1} \dot{\mathbf{I}}_N \end{cases} \quad (3-13)$$

则式 (3-12) 可表示为

$$\dot{\tilde{I}} = \dot{I}_{eq} - Y_{eq} \dot{\tilde{U}} \quad (3-14)$$

由此可见, 诺顿等值导纳是保留节点  $p$ , 消去所有其余节点, 对网络其余部分进行化简的过程。过程中未做任何简化假设, 所以从节点  $p$  和参考节点组成的端口向原网络看进去, 等值前和等值后两者对外部的表现是相同的。诺顿等值电流源电流是将所有除节点  $p$  以外的节点消去后, 在节点  $p$  上产生的等值注入电流。

戴维南等值可表示为

$$\dot{\tilde{U}} = \dot{U}_{eq} - Z_{eq} \dot{\tilde{I}} \quad (3-15)$$

其中等值电阻  $Z_{eq}$  与等值电压  $\dot{U}_{eq}$  分别可通过诺顿等值的参数求出, 即

$$\begin{cases} Z_{eq} = Y_{eq}^{-1} \\ \dot{U}_{eq} = Y_{eq}^{-1} \dot{I}_{eq} \end{cases} \quad (3-16)$$

若将原电力网络约束方程用节点阻抗表示:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_N \\ \dot{U}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_N & \mathbf{Z}_{Np} \\ \mathbf{Z}_{Np}^T & Z_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_N \\ \dot{I}_p - \dot{\tilde{I}} \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

由节点阻抗矩阵的定义可知, 节点  $p$  的自阻抗是全网元件等值到节点  $p$  和地组成端口后的等值阻抗, 原网络节点  $p$  的电压即为开路电压, 因此戴维南等值的参数也可以表示为

$$\begin{cases} Z_{eq} = Z_{pp} \\ \dot{U}_{eq} = \mathbf{Z}_{Np}^T \dot{\mathbf{I}}_N + Z_{pp} \dot{I}_p \end{cases} \quad (3-18)$$

**例 3-1** 如图 3-3, 试通过矩阵方程化简得到节点③的诺顿等值电路和戴维南等值电路。

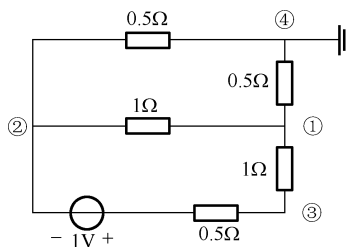
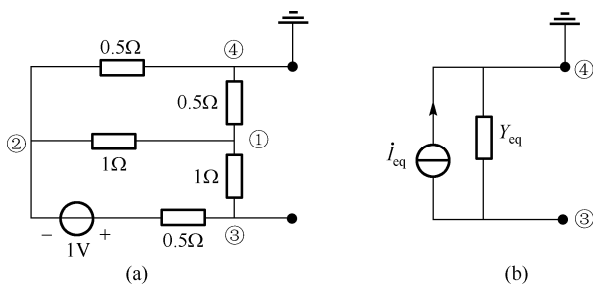


图 3-3 四节点网络

解:



由图(a)知

$$Y = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_N & \mathbf{Y}_{Np} \\ \mathbf{Y}_{Np}^T & Y_{pp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

即有

$$\mathbf{Y}_N = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad Y_{pp} = 2, \quad \mathbf{Y}_{Np} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_N = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad i_p = 2$$

那么有

$$Y_{eq} = Y_{pp} - \mathbf{Y}_{Np}^T \mathbf{Y}_N^{-1} \mathbf{Y}_{Np} = 2 - \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 - 1.5 = 0.5$$

$$i_{eq} = i_p - \mathbf{Y}_{Np}^T \mathbf{Y}_N^{-1} \mathbf{I}_N = 2 - \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = 1$$

诺顿等值电路如图(b)所示, 用公式同理可求得戴维南等值电路。

### 3.2.2 多端口诺顿等值与戴维南等值

当需要详细研究多个端口和外接电路之间的关系时, 就需要从多个端口向电力网内看进去的等值电路, 这时需要建立电力网络的多端口诺顿等值和多端口戴维南等值。

如图 3-4(a)所示, 原电力网络有  $n+m$  个独立节点, 仅对节点集合  $M = \{1, 2, \dots, m\}$  感兴趣, 可将这  $m$  个节点和参考节点之间组成的  $m$  个端口进行诺顿或戴维南等值。

采用类似于单端口网络的诺顿等值的分析方法, 将欲研究的  $m$  个节点与剩余的  $n$  个节点分开, 将节点电压方程写成分块形式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_M - \dot{\mathbf{I}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_N & \mathbf{Y}_{NM} \\ \mathbf{Y}_{NM}^T & \mathbf{Y}_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_N \\ \dot{\mathbf{U}} \end{bmatrix} \quad (3-19)$$

令等值导纳矩阵  $\mathbf{Y}_{eq}$  与等值电流向量  $\mathbf{I}_{eq}$  为

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_{\text{eq}} = \mathbf{Y}_{\text{MM}} - \mathbf{Y}_{\text{NM}}^{\text{T}} \mathbf{Y}_{\text{N}}^{-1} \mathbf{Y}_{\text{NM}} \\ \mathbf{I}_{\text{eq}} = \mathbf{I}_{\text{M}} - \mathbf{Y}_{\text{NM}}^{\text{T}} \mathbf{Y}_{\text{N}}^{-1} \mathbf{I}_{\text{N}} \end{cases} \quad (3-20)$$

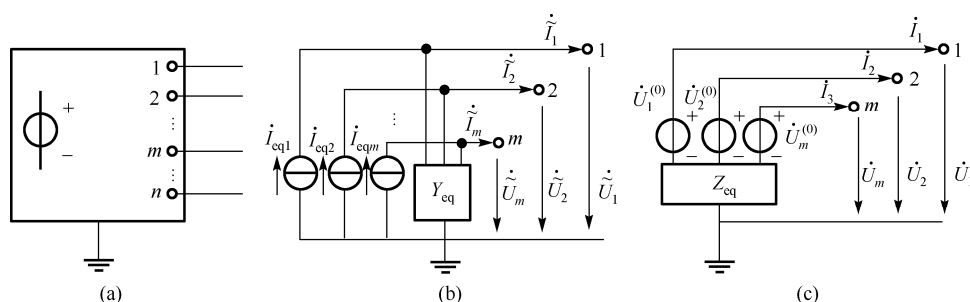


图 3-4 多端口网络

多端口的诺顿等值为

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{I}_{\text{eq}} - \mathbf{Y}_{\text{eq}} \dot{\mathbf{U}} \quad (3-21)$$

同样可得到多端口的戴维南等值电路方程为

$$\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{U}}_{\text{eq}} - \mathbf{Z}_{\text{eq}} \dot{\mathbf{I}}$$

其参数为

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_{\text{eq}} = \mathbf{Y}_{\text{eq}}^{-1} \\ \dot{\mathbf{U}}_{\text{eq}} = \mathbf{Y}_{\text{eq}}^{-1} \mathbf{I}_{\text{eq}} = \mathbf{Z}_{\text{NM}}^{\text{T}} \mathbf{I}_{\text{N}} + \mathbf{Z}_{\text{M}} \mathbf{I}_{\text{M}} \end{cases}$$

### 3.3 WARD 等值

电网分析计算中，由于信息交换或安全性的原因，外部网络的变化并不总能及时由内部电网的控制中心所掌握，这时就需要认真地对外部系统进行等值，以正确反映外部系统对内部系统中扰动的影响。尤其是在内部系统中进行预想事故的安全分析时，外部系统对内部系统的分析结果有重要影响。

WARD 等值正是一种针对外部网络的静态等值方法，也是功率源网络最基本的等值方法，是线性网络等值在功率源网络中的延伸。在电网计算中，有时要仔细研究网络中感兴趣的部分，这时可以将其余不感兴趣的部分网络进行化简，以得到感兴趣部分网络的电流和电压关系。最常用的网络化简方法是矩阵方程的高斯消去法，而网络化简可以在导纳矩阵上进行。

令原网络的节点用集合  $N$  表示，欲化简掉的部分为外部网络，其节点集用  $E$  表示。保留部分网络的节点用保留集  $K$  表示。在保留集和外部网络节点相关联的节点组成边界节点集，用  $B$  表示。不和外部节点集关联的部分为内部节点集，用  $I$  表示，如图 3-5 所示。外部网络的网络拓扑结构和元件参数由上一级电网控制中心提供，内部系统和边界系统的实时潮流解通过内部网络的状态估计给出。需要求解的是外部系统的等值网络和等值边界节点注入电流。目标是使等值后在内部网络中进行的各种操作调整后的稳态分析与在全网末等值系统所做的

分析结果相同，或者十分接近。若外部网络中的节点注入电流不变，将节点导纳矩阵表示的网络按  $I$ ,  $B$ ,  $E$  集合划分，则可写出分块矩阵形式表示的节点电压方程为：

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_E \\ \dot{\mathbf{I}}_B \\ \dot{\mathbf{I}}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{EE} & \mathbf{Y}_{EB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_{BE} & \mathbf{Y}_{BB} & \mathbf{Y}_{BI} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{IB} & \mathbf{Y}_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_E \\ \dot{\mathbf{U}}_B \\ \dot{\mathbf{U}}_I \end{bmatrix} \quad (3-22)$$

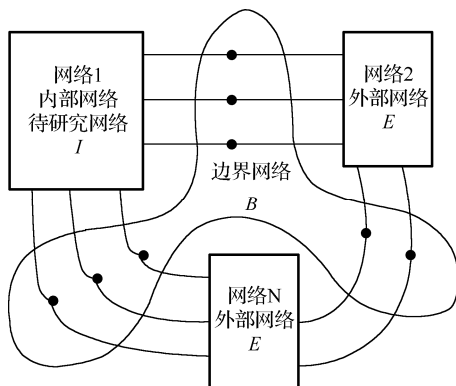


图 3-5 WARD 等值网络分类

消去外部节点电压变量  $\dot{\mathbf{U}}_E$ ，有

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_{BB} & \mathbf{Y}_{BI} \\ \mathbf{Y}_{IB} & \mathbf{Y}_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_B \\ \dot{\mathbf{U}}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_B \\ \dot{\mathbf{I}}_I \end{bmatrix} \quad (3-23)$$

其中  $\tilde{\mathbf{Y}}_{BB}$  为等值网的边界节点导纳矩阵， $\dot{\mathbf{I}}_B$  为等值边界节点注入电流，其表达式为

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{Y}}_{BB} = \mathbf{Y}_{BB} - \mathbf{Y}_{BE} \mathbf{Y}_{EE}^{-1} \mathbf{Y}_{EB} \\ \dot{\mathbf{I}}_B = \dot{\mathbf{I}}_B - \mathbf{Y}_{BE} \mathbf{Y}_{EE}^{-1} \dot{\mathbf{I}}_E \end{cases} \quad (3-24)$$

式 (3-23) 可简记为

$$\mathbf{Y}_{eq} \dot{\mathbf{U}}_{eq} = \dot{\mathbf{I}}_{eq} \quad (3-25)$$

这样的等值称为节点电流给定情况下的 WARD 等值。

但实际电力系统中给定的是节点注入功率，而不是节点注入电流，所以上述等值不能在电力系统计算中直接使用，应进行一些处理。

功率与电压、电流关系满足

$$\mathbf{S}_i = \dot{\mathbf{U}}_i \dot{\mathbf{I}}_i^*$$

式 (3-23) 两侧同左乘以保留节点电压构成的对角矩阵  $\text{diag}(\dot{\mathbf{U}}_K)$  的共轭，则有

$$\text{diag}(\dot{\mathbf{U}}_K) \dot{\mathbf{Y}}_{eq} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_B \\ \dot{\mathbf{U}}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{S}}_B - \text{diag}(\dot{\mathbf{U}}_B) \mathbf{Y}_{BE} \mathbf{Y}_{EE}^{-1} \text{diag}(\dot{\mathbf{U}}_E^{-1}) \dot{\mathbf{S}}_E \\ \dot{\mathbf{S}}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{S}}_B \\ \dot{\mathbf{S}}_I \end{bmatrix}$$

这就是节点功率给定下的 WARD 等值。在等值方程中，边界网络节点的注入功率发生了

变化,除了原有的功率外还受到外部网络节点电压和功率的影响,而内部网络节点注入功率没有任何变化。

**例 3-2** 对如图 3-6 所示的电力系统,各条支路的导纳和节点注入电流已在图上标出。若将系统节点划分为内部系统节点集  $I = \{5\}$ ,边界系统节点集  $B = \{3,4\}$ ,外部系统节点集  $E = \{1,2\}$ ,对该系统进行 WARD 等值。

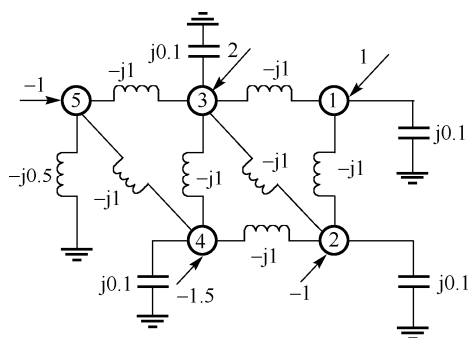


图 3-6 WARD 等值的图

**解:** 首先按  $E, B, I$  的顺序建立节点导纳矩阵,并写出导纳矩阵表示网络方程。由此式有

$$j \begin{bmatrix} -1.9 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2.9 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3.9 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2.9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \\ \dot{U}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1.5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$Y_{EE} = j \begin{bmatrix} -1.9 & 1 \\ 1 & -2.9 \end{bmatrix}, \quad Y_{EB} = j \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y_{BE} = Y_{EB}^T,$$

$$Y_{BB} = j \begin{bmatrix} -3.9 & 1 \\ 1 & -2.9 \end{bmatrix}, \quad Y_{BI} = j \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y_{IB} = Y_{BI}^T,$$

$$Y_{II} = -j2.5, \quad \dot{I}_E = j \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \dot{I}_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1.5 \end{bmatrix}, \quad \dot{I}_I = -1$$

可知边界等值导纳矩阵:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{BB} &= Y_{BB} - Y_{BE} Y_{EE}^{-1} Y_{EB} \\ &= j \begin{bmatrix} -3.9 & 1 \\ 1 & -2.9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.9 & 1 \\ 1 & -2.9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= j \left( \begin{bmatrix} -3.9 & 1 \\ 1 & -2.9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6430 & 0.2217 \\ 0.2217 & 0.4213 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= j \left( \begin{bmatrix} -3.9 & 1 \\ 1 & -2.9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.508 & 0.6430 \\ 0.6430 & 0.4213 \end{bmatrix} \right) \\
&= j \begin{bmatrix} -2.392 & 1.6430 \\ 1.6430 & -2.4787 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

求等值边界注入电流：

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{I}}_B &= \dot{\mathbf{I}}_B - \mathbf{Y}_{BE} \mathbf{Y}_{EE}^{-1} \dot{\mathbf{I}}_E \\
&= \begin{bmatrix} 2 \\ -1.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.9 & 1 \\ 1 & -2.9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 \\ -1.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2217 \\ -0.1996 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2.2217 \\ -1.6996 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

等值后的网络方程如下：

$$j \begin{bmatrix} -2.392 & 1.6430 & | & 1 \\ 1.6430 & -2.4787 & | & 1 \\ \hline 1 & 1 & | & -2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \\ \dot{U}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2217 \\ -1.6996 \\ -1 \end{bmatrix}$$

### 3.4 REI 等值

REI 等值的全称为辐射状等值独立电源法 (Radial Equivalent Independent)。考查 WARD 等值的公式，如果外部网的节点注入电流  $\dot{\mathbf{I}}_E = 0$ ，则等值边界注入电流  $\dot{\mathbf{I}}_B$  就是原来的边界注入电流  $\dot{\mathbf{I}}_B$ ，WARD 等值可以简化。REI 等值就是基于这样一种想法，把外部网中的节点注入电流（功率）加以归并，移到外部的一个或少数几个节点上，原来的外部网络就变成了无源网络，就可以很方便地对外部的无源网络进行等值。

与 WARD 等值一样，REI 等值也将网络的节点集合  $N$  划分为内部节点集合  $I$ 、边界节点集合  $B$ 、外部节点集合  $E$ 。不同在于，REI 等值网络还包含若干虚构的节点，虚构的节点称为 REI 节点，其节点集合叫 REI 节点集合，记为  $R$ 。

每个 REI 节点都对应若干外部有源节点，REI 节点对应的节点集合叫 REI 节点的联系节点集合，简称联系节点集合，记为  $E(r)$ ，其中  $r$  是某一个 REI 节点。联系节点集合的数量等于 REI 节点的数量。

REI 节点是杜撰的，与网络  $N$  原本没有关系，必须认为设定 REI 节点与网络  $N$  的连接关系。如图 3-7 是某个 REI 节点  $r$  的 REI 网络。它是一个星形辐射网络，节点  $c$  处在中心位置，称为汇集节点。REI 节点  $r$  以及它的联系节点，都与汇集节点  $c$  直接连接。

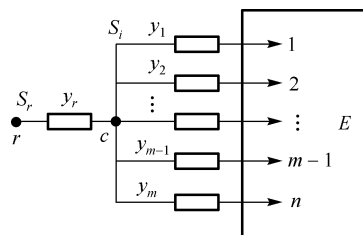


图 3-7 节点  $r$  的 REI 网络



如果 REI 节点  $r$  的联系节点数量为  $m$ ，那么该 REI 网有  $m+1$  条支路，这些支路同样也是虚构的。

REI 网要求所有  $m+1$  条支路的流动方向相同。从联系节点流向汇集节点  $c$ ，再由汇集节点  $c$  流向 REI 节点  $r$ ；或者反过来，由 REI 节点  $r$  流向汇集节点  $c$ ，再由汇集节点流向联系节点集合。

下面考查如何确定图 3-7 中的等值网中各支路参数。

首先考虑 REI 网是无损网，即在图 3-7 中应有

$$S_r = \sum_{i=1}^m S_i \quad (3-26)$$

以图 3-7 箭头所指方向为参考方向，设联系节点  $i$  的注入功率为  $S_i$ ，节点电压为  $U_i$ 。则节点  $i$  的注入电流为

$$\dot{I}_i = \frac{\dot{S}_i}{\dot{U}_i} \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (3-27)$$

这同样也是 REI 网络中由汇集节点流向联系节点的电流。那么，联系节点  $i$  与汇集节点  $c$  之间  $m$  条支路的导纳为

$$y_i = \frac{\dot{I}_i}{\dot{U}_c - \dot{U}_i} \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (3-28)$$

REI 等值支路的汇集节点的电压可以任意指定，设  $\dot{U}_c = 0$ ，则式 (3-28) 可表示为

$$y_i = -\frac{\dot{I}_i}{\dot{U}_i} = -\frac{\dot{S}_i}{\dot{U}_i \dot{U}_i} = -\frac{\dot{S}_i}{|\dot{U}_i|^2} \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (3-29)$$

REI 节点  $r$  流向汇集节点  $c$  的电流是联系节点的电流和，即

$$\dot{I}_r = \sum_{i=1}^m \dot{I}_i = \sum_{i=1}^m \frac{\dot{S}_i}{\dot{U}_i} \quad (3-30)$$

根据功率与电流、电压之间的关系，REI 节点  $r$  的电压为

$$\dot{U}_r = \frac{\dot{S}_r}{\dot{I}_r} \quad (3-31)$$

将式 (3-26) 和式 (3-30) 代入，得

$$\dot{U}_r = \frac{\sum_{i=1}^m \dot{S}_i}{\sum_{i=1}^m \frac{\dot{S}_i}{\dot{U}_i}} \quad (3-32)$$

则汇集节点  $c$  与 REI 节点  $r$  之间的支路导纳为

$$y_r = \frac{\dot{I}_r}{\dot{U}_r - \dot{U}_c} = \frac{\dot{S}_r}{\dot{U}_r^2} \quad (3-33)$$

至此，含一个 REI 节点  $r$  的 REI 网  $m+1$  条支路的参数确定完毕。等值支路参数的性质和

节点注入功率的性质有关,这可由式(3-29)和式(3-33)看到。还可以看到 $y_i$ 和 $y_r$ 的计算式相差一个负号。当节点 $i$ 注入正的有功功率时,即节点 $i$ 是发电机节点时, $\dot{U}_i$ 的实部为正, $S_i$ 的实部为正, $y_i$ 的实部为负。也就是说支路 $(c-i)$ 是负电阻支路,而支路 $(r-c)$ 是正电阻支路,前者消耗有功,后者产生有功。从整个 REI 网的等值支路看,功率损耗为零。对无功也可进行类似的分析。

**例 3-3** 图 3-8 所示的外部网,如果 $\dot{S}_1 = 2 + j1$ ,  $\dot{S}_2 = 3 + j2$ ,  $\dot{S}_3 = 1 + j0.5$ ,  $\dot{U}_1 = 1.0 \angle 5^\circ$ ,  $\dot{U}_2 = 1.01 \angle 10^\circ$ ,  $\dot{U}_3 = 0.98 \angle 2^\circ$ , 求 REI 网的等值参数。

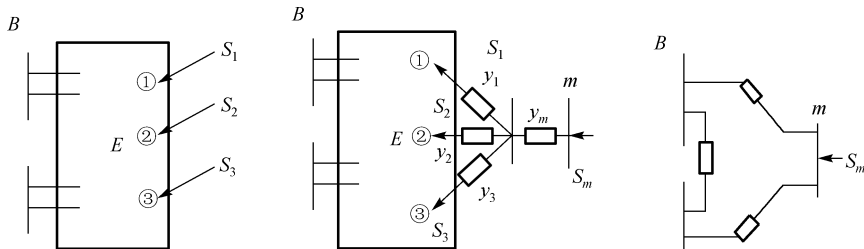


图 3-8 WARD 等值图

**解:** 由式(3-32)有

$$S_m = S_1 + S_2 + S_3 = 2 + j1 + 3 + j2 + 1 + j0.5 = 6 + j3.5$$

然后用式(3-32)求 REI 节点  $m$  的电压,有

$$\begin{aligned} \dot{U}_m &= \frac{S_m}{\sum_{i=1}^3 \frac{S_i}{\dot{U}_i}} = \frac{6 + j3.5}{\frac{2 + j1}{1.0 \angle 5^\circ} + \frac{3 + j2}{1.01 \angle 10^\circ} + \frac{1 + j0.5}{0.98 \angle 2^\circ}} \\ &= 1.0001 \angle 7.11^\circ \end{aligned}$$

用式(3-33)求联结 REI 节点  $m$  的支路导纳

$$y_m = \frac{\hat{S}_m}{U_m^2} = \frac{6 - j3.5}{1.0001^2} = 5.9988 - j3.4993$$

最后用式(3-29)求和节点①、②、③相联的支路的导纳

$$y_1 = -\frac{\hat{S}_1}{U_1^2} = -\frac{2 - j1}{1.0^2} = -2 + j1$$

$$y_2 = -\frac{\hat{S}_2}{U_2^2} = -\frac{3 - j2}{1.01^2} = -2.9409 + j1.9606$$

$$y_3 = -\frac{\hat{S}_3}{U_3^2} = -\frac{1 - j0.5}{0.98^2} = -1.0412 + j0.5206$$

为了提高 REI 等值的精度,应将外部网中哪些节点的注入归并到一起是一个重要问题。通常将节点注入性质相同者归入一组,例如,把发电机节点归入一组,负荷节点归入另一组。

或把 PV 节点归入一组, 把 PQ 节点归入另一组。也可按地理位置的远近进行归并。即可以归并为多个集合, 从而在外部网产生多个 REI 节点。

如图 3-9 是一个电力网络, 现欲对内部节点  $I$  进行研究, 需要对网络进行等值变换。为了描述负荷的总体变化和电源(发电机)的总体变化, 设置两个 REI 节点: 一个负荷 REI 节点  $r_l$ , 一个发电机 REI 节点  $r_g$ 。

对应两个 REI 节点  $r_l$  和  $r_g$ , 构造两个 REI 网络, 每个网络都有一个中间节点, 负荷 REI 网络的汇集节点是  $c_l$ , 发电机 REI 网络的汇集节点是  $c_g$ 。

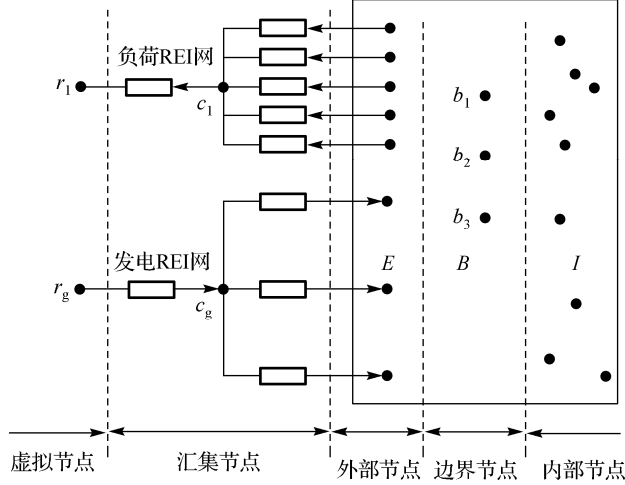


图 3-9 一个 REI 网络

按照 REI 网络参数求取方法确定两个 REI 网络的参数。

在两个 REI 网络确定之后, 整个网络的节点由五个节点集合构成, 由于所有发电机功率都集中于发电机 REI 节点  $r_g$ , 所有负荷功率都集中于负荷 REI 节点  $r_l$ , 所以在这个例子中除了这两个 REI 节点, 其他节点都没有功率源。用集合  $M$  表示保留节点集  $K$  中去除内部节点集  $I$  后剩下的节点集合; 用节点集  $L$  表示由外部网络节点集合  $E$  和汇集节点集合  $C$  的集合。这样, 简化后的等值网络矩阵可表示为

$$\begin{bmatrix} \tilde{Y}_{MM} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Y_{IB} & Y_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_R \\ \dot{U}_B \\ \dot{U}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_R \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3-34)$$

其中

$$\tilde{Y}_{MM} = Y_{MM} - Y_{ML} Y_{LL}^{-1} Y_{LM}$$

设  $\dot{U}_K = [\dot{U}_R \quad \dot{U}_B \quad \dot{U}_I]^T$ , 将式 (3-34) 写成功率的形式, 得

$$\text{diag}(\dot{U}_K) \begin{bmatrix} \tilde{Y}_{MM} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Y_{IB} & Y_{II} \end{bmatrix} \dot{U}_K = \begin{bmatrix} \dot{S}_R \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

此时，两个 REI 节点的功率被完整地保留下来，这正是 REI 等值的关键。等值后的网络如图 3-10 所示。

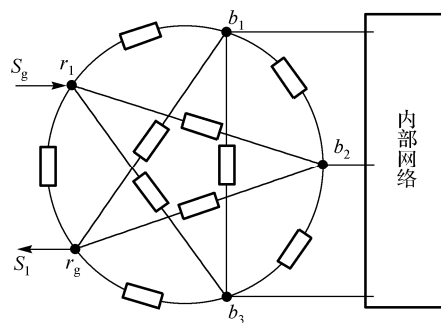


图 3-10 REI 等值结果

# 电力网络的灵敏度分析

## 4.1 灵敏度的概念

### 4.1.1 网络方程的灵敏度

考查一个集总、线性、时不变网络  $N$ ，其某一网络函数为  $T(s)$ 。设  $x$  为与该网络某元件有关的参数，它可以是元件值，或是影响元件值的一些物理量（如温度、压力）。为研究  $x$  的微小变化对网络性能的影响，将网络函数表示为  $T(s, x)$ 。设参数  $x$  在标称值  $x_0$  附近有微小改变：

$$\Delta x = x - x_0$$

将  $T(s, x)$  在  $x_0$  附近用泰勒级数展开：

$$T(s, x) = T(s, x_0) + \left. \frac{\partial T(s, x)}{\partial x} \right|_{x=x_0} \Delta x + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2 T(s, x)}{\partial x^2} \Delta x^2 + \dots \quad (4-1)$$

设函数  $T(s, x)$  在  $x_0$  处连续，且  $\Delta x$  很小，忽略  $\Delta x$  的平方及各高次方项，可得：

$$\Delta T = T(s, x) - T(s, x_0) = \left. \frac{\partial T(s, x)}{\partial x} \right|_{x=x_0} \cdot \Delta x \quad (4-2)$$

式中， $\Delta T$  为由于参数  $x$  偏离标称值  $x_0$  而引起的网络函数  $T(s, x)$  的偏差量。因此，网络函数  $T(s, x)$  相对于参数  $x$  的灵敏度定义为：

$$S_x^T = \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4-3)$$

网络函数  $T(s, x)$  相对于参数  $x$  的归一化灵敏度定义为：

$$\bar{S}_x^T = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{x}{T} = \frac{\partial T}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial \ln T}{\partial \ln x} \quad (4-4)$$

式 (4-3)、式 (4-4) 可表述为，网络的归一化灵敏度  $\bar{S}_x^T$  是当参数  $x$  有微小变化  $\Delta x$  时，它所引起的网络参数  $T$  的相对改变量与参数  $x$  的相对改变量之比当  $\Delta x$  趋于零时的极限。而网络的未归一化灵敏度  $S_x^T$  则是网络函数  $T$  对参数  $x$  的偏导数，或解释为网络函数  $T$  的微小改变量与导致  $T$  改变的参数  $x$  的微小改变量之比当  $\Delta x$  趋于零时的极限。

网络函数的偏差及相对偏差与灵敏度的关系为：

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x = S_x^T \Delta x \quad (4-5)$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \bar{S}_x^T \frac{\Delta x}{x} \quad (4-6)$$

如果网络中有多个元件参数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  同时产生微小变化, 网络函数  $T$  对各元件参数的归一化灵敏度分别为  $\bar{S}_{x_1}^T, \bar{S}_{x_2}^T, \dots, \bar{S}_{x_n}^T$ , 则这些参数同时改变所引起网络函数  $T$  的偏差和相对偏差分别为:

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial T}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial x_n} \Delta x_n \quad (4-7)$$

$$= \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial T}{\partial x_k} \Delta x_k \right) = \sum_{k=1}^n \left( \bar{S}_{x_k}^T \frac{\Delta x_k}{x_k} T \right) \quad (4-8)$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \sum_{k=1}^n \bar{S}_{x_k}^T \frac{\Delta x_k}{x_k} \quad (4-9)$$

应当指出, 上面所介绍的灵敏度只能用以预报网络参数有微小变化时对网络性能的影响, 而不能正确给出网络参数有较大改变时网络性能的改变。这是因为式(4-2)所表示的  $\Delta T$  与  $\Delta x$  的关系是函数  $T(s, x)$  在参数  $x = x_0$  处一阶逼近的结果。

有时人们需要计算作为网络输出的变量对该网络某些参数的偏导数以及灵敏度, 这与计算相应网络函数对这些参数的偏导数、灵敏度基本上是相同的问题。一般而言, 将网络函数表示为:

$$T(s) = \frac{R(s)}{E(s)} \quad (4-10)$$

式中,  $R(s)$ 、 $E(s)$  分别为网络输出变量、输入变量的象函数。 $T(s)$  对  $x$  的偏导数为:

$$\frac{\partial T(s)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{R(s)}{E(s)} \right) = \frac{1}{E(s)} \cdot \frac{\partial R(s)}{\partial x} \quad (4-11)$$

$T(s)$  对  $x$  的归一化灵敏度为:

$$\bar{S}_x^{T(s)} = \frac{\partial T(s)}{\partial x} \cdot \frac{x}{T} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{R(s)}{E(s)} \right) \cdot \frac{x E(s)}{R(s)} = \frac{\partial R(s)}{\partial x} \cdot \frac{x}{R(s)} = \bar{S}_x^{R(s)} \quad (4-12)$$

以上两式表明, 网络输出变量对参数  $x$  的偏导数等于相应的网络函数对参数  $x$  的偏导数乘以网络输入变量, 而网络输出变量对参数  $x$  的灵敏度则与相应的网络函数对参数  $x$  的灵敏度相等。

式(4-3)、式(4-4)所定义的灵敏度、归一化灵敏度和式(4-5)~式(4-8)中关于网络函数偏差的讨论都是基于复频域网络函数  $T(s)$  的。令  $s = j\omega$ , 即得频域中的网络函数  $T(j\omega)$ , 它是一个复数, 可表示为:

$$T(j\omega) = |T(j\omega)| e^{j\phi(\omega)} \quad (4-13)$$

$T(j\omega)$  的模  $|T(j\omega)|$  和辅角  $\phi(\omega)$  是角频率  $\omega$  的函数。如果网络函数  $T(j\omega)$  代表网络的复增益,

则  $|T(j\omega)|$  为网络的增益, 有时简化表示为  $|T|$ 。下面将介绍电路设计时经常关注的增益灵敏度和相位灵敏度。

频域网络函数对参数  $x$  的归一化灵敏度为:

$$\bar{S}_x^{T(j\omega)} = \frac{\partial \ln T(j\omega)}{\partial \ln x} = x \frac{\partial \ln T(j\omega)}{\partial x} \quad (4-14)$$

由式 (4-13) 知:

$$\ln T(j\omega) = \ln |T(j\omega)| + j\phi(j\omega) \quad (4-15)$$

因此,

$$\bar{S}_x^{T(j\omega)} = x \frac{\partial \ln |T(j\omega)|}{\partial x} + jx \frac{\partial \phi(j\omega)}{\partial x} \quad (4-16)$$

分别对上式取实部和虚部, 得:

$$\operatorname{Re}[\bar{S}_x^{T(j\omega)}] = x \frac{\partial \ln |T|}{\partial x} = \bar{S}_x^{|T|} \quad (4-17)$$

$$\operatorname{Im}[\bar{S}_x^{T(j\omega)}] = x \frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi \bar{S}_x^\phi \quad (4-18)$$

在以上两式中,  $\bar{S}_x^{|T|}$  为增益  $|T(j\omega)|$  对  $x$  的归一化灵敏度,  $\bar{S}_x^\phi$  为相角  $\phi(\omega)$  对  $x$  的归一化灵敏度, 它们分别可由网络的复增益  $T(j\omega)$  对  $x$  的归一化灵敏度取实部、虚部而得, 即:

$$\bar{S}_x^{|T|} = \operatorname{Re}[\bar{S}_x^{T(j\omega)}] \quad (4-19)$$

$$\bar{S}_x^\phi = \operatorname{Im}[\bar{S}_x^{T(j\omega)}] / \phi \quad (4-20)$$

根据归一化灵敏度定义, 可导出下列灵敏度恒等式:

(1) 如果  $T$  不是  $x$  的函数, 则

$$\bar{S}_x^T = 0 \quad (4-21)$$

(2) 设  $C$  是任意常数, 则

$$\bar{S}_x^{Cx} = 1 \quad (4-22)$$

(3)

$$\bar{S}_x^{1/T} = -\bar{S}_x^T \quad (4-23)$$

**证明:**

$$\bar{S}_x^{1/T} = \frac{\partial \left( \ln \frac{1}{T} \right)}{\partial (\ln x)} = \frac{\partial (-\ln T)}{\partial (\ln x)} = -\bar{S}_x^T$$

$$(4) \quad \bar{S}_{1/x}^T = -\bar{S}_x^T \quad (4-24)$$

(5) 设  $T$  是  $y$  的函数,  $y$  是  $x$  的函数, 则

$$\bar{S}_x^T = \bar{S}_y^T \bar{S}_x^y \quad (4-25)$$

$$(6) \quad \bar{S}_x^{T_1 T_2} = \bar{S}_x^{T_1} + \bar{S}_x^{T_2} \quad (4-26)$$

证明:

$$\bar{S}_x^{T_1 T_2} = \frac{\partial(\ln T_1 T_2)}{\partial(\ln x)} = \frac{\partial(\ln T_1 + \ln T_2)}{\partial(\ln x)} = \bar{S}_x^{T_1} + \bar{S}_x^{T_2}$$

$$(7) \quad \bar{S}_x^{T_1/T_2} = \bar{S}_x^{T_1} - \bar{S}_x^{T_2} \quad (4-27)$$

$$(8) \quad \bar{S}_x^{T^n} = n \bar{S}_x^T \quad (4-28)$$

证明:

$$\bar{S}_x^{T^n} = \frac{\partial(\ln T^n)}{\partial(\ln x)} = \frac{\partial(n \ln T)}{\partial(\ln x)} = n \bar{S}_x^T$$

令  $T = x$ , 得

$$\bar{S}_x^{x^n} = n \bar{S}_x^x = n$$

由上式可得

$$\bar{S}_x^{C x^n} = \bar{S}_x^{x^n} = n$$

$$(9) \quad \bar{S}_{x^n}^T = \frac{1}{n} \bar{S}_x^T \quad (4-29)$$

$$(10) \quad \bar{S}_x^{C f(x)} = \bar{S}_x^{f(x)} \quad (4-30)$$

$$(11) \quad \bar{S}_x^{(T_1+T_2)} = \frac{T_1}{T_1+T_2} \bar{S}_x^{T_1} + \frac{T_2}{T_1+T_2} \bar{S}_x^{T_2} \quad (4-31)$$

证明:

$$\begin{aligned} \bar{S}_x^{(T_1+T_2)} &= \frac{x}{T_1+T_2} \cdot \frac{\partial(T_1+T_2)}{\partial x} \\ &= \frac{1}{T_1+T_2} \left( T_1 \frac{x}{T_1} \cdot \frac{\partial T_1}{\partial x} + T_2 \frac{x}{T_2} \cdot \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) \\ &= \frac{1}{T_1+T_2} (T_1 \bar{S}_x^{T_1} + T_2 \bar{S}_x^{T_2}) \\ &= \frac{T_1}{T_1+T_2} \bar{S}_x^{T_1} + \frac{T_2}{T_1+T_2} \bar{S}_x^{T_2} \end{aligned}$$

#### 4.1.2 代数方程组的灵敏度

**定义 4-1** 代数方程组的灵敏度: 关于非奇异矩阵  $A \in R^{n \times n} = (a_{ij})$  的方程组  $AX = B$  的灵敏度定义为:

$$\lambda(X, B) = \frac{\partial X}{\partial B}, \quad \lambda(X, A) = \frac{\partial X}{\partial A}$$

具体地, 任意解元素  $x_k$  对任意右边量元素  $b_i$  的灵敏度为:



$$\lambda(x_k, b_i) = \frac{\partial x_k}{\partial b_i} \quad (k, i = 1, 2, \dots, n) \quad (4-32)$$

任意解元素  $x_k$  对系数矩阵任意元素  $a_{ij}$  的灵敏度为:

$$\lambda(x_k, a_{ij}) = \frac{\partial x_k}{\partial a_{ij}} \quad (k, i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (4-33)$$

这里,  $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^n = (x_k)$ ;  $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^n = (b_i)$ 。

根据式 (4-32), 解向量  $\mathbf{X}$  对右边向量任意元素  $b_i$  的灵敏度为:

$$\lambda(\mathbf{X}, b_i) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial b_i} = \begin{bmatrix} \lambda(x_1, b_i) \\ \lambda(x_2, b_i) \\ \vdots \\ \lambda(x_n, b_i) \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4-34)$$

解向量  $\mathbf{X}$  的任意元素  $x_k$  对右边向量  $\mathbf{B}$  的灵敏度为:

$$\lambda(x_k, \mathbf{B}) = \frac{\partial x_k}{\partial \mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \lambda(x_k, b_1) \\ \lambda(x_k, b_2) \\ \vdots \\ \lambda(x_k, b_3) \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (4-35)$$

根据式 (4-33), 解向量  $\mathbf{X}$  对系数矩阵  $\mathbf{A}$  任意元素  $a_{ij}$  的灵敏度为:

$$\lambda(\mathbf{X}, a_{ij}) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial a_{ij}} = \begin{bmatrix} \lambda(x_1, a_{ij}) \\ \lambda(x_2, a_{ij}) \\ \vdots \\ \lambda(x_n, a_{ij}) \end{bmatrix} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (4-36)$$

解向量  $\mathbf{X}$  任意元素  $x_k$  对系数矩阵  $\mathbf{A}$  的灵敏度为:

$$\lambda(x_k, \mathbf{A}) = \frac{\partial x_k}{\partial \mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \lambda(x_k, a_{11}) & \lambda(x_k, a_{12}) & \cdots & \lambda(x_k, a_{1n}) \\ \lambda(x_k, a_{21}) & \lambda(x_k, a_{22}) & \cdots & \lambda(x_k, a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda(x_k, a_{n1}) & \lambda(x_k, a_{n2}) & \cdots & \lambda(x_k, a_{nn}) \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (4-37)$$

### 4.1.3 网络公式与算法

定义摄动方程: 代数方程组的全微分表达式为:

$$\mathbf{A}d\mathbf{X} + d\mathbf{A}\mathbf{X} = d\mathbf{B}$$

即

$$d\mathbf{X} = \mathbf{C}d\mathbf{B} - \mathbf{C}d\mathbf{A}\mathbf{X} \quad (4-38)$$

上式为代数方程组  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$  的摄动方程。其中,  $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}$ 。

根据摄动方程, 有:

$$dx_k = \sum_{i=1}^n c_{ki} db_i - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ki} x_j da_{ij} \quad (k=1,2,\dots,n)$$

因此

$$\lambda(x_k, b_i) = c_{ki} \quad (k, i=1,2,\dots,n) \quad (4-39)$$

$$\lambda(x_k, a_{ij}) = -c_{ki} x_j \quad (k, i, j=1,2,\dots,n) \quad (4-40)$$

根据式 (4-39), 解向量  $\mathbf{X}$  对右边向量任意元素  $b_i$  的灵敏度为

$$\lambda(\mathbf{X}, b_i) = \mathbf{C}_i^c \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (4-41)$$

式中,  $\mathbf{C}_i^c$  表示矩阵  $\mathbf{C}$  的第  $i$  列。

解向量  $\mathbf{X}$  任意元素  $x_k$  对右边向量  $\mathbf{B}$  的灵敏度为:

$$\lambda(x_k, \mathbf{B}) = \mathbf{C}_k^{rT} \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (4-42)$$

式中,  $\mathbf{C}_k^r$  表示矩阵  $\mathbf{C}$  的第  $k$  行。

根据式 (4-40), 解向量  $\mathbf{X}$  对系数矩阵  $\mathbf{A}$  任意元素  $a_{ij}$  的灵敏度为:

$$\lambda(\mathbf{X}, a_{ij}) = -x_j \mathbf{C}_i^c \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (4-43)$$

解向量  $\mathbf{X}$  任意元素  $x_k$  对系数矩阵  $\mathbf{A}$  的灵敏度为:

$$\lambda(x_k, \mathbf{A}) = -\mathbf{C}_k^{rT} \mathbf{X}^T \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (4-44)$$

例 4-1 已知线性方程组

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

的解为

$$\mathbf{X} = [1 \quad 2 \quad 1]^T$$

计算以下 4 种灵敏度:

- (1) 解向量  $\mathbf{X}$  对  $b_1$  的灵敏度;
- (2) 解向量  $\mathbf{X}$  对  $a_{12}$  的灵敏度;
- (3) 解向量元素  $x_3$  对右边向量  $\mathbf{B}$  的灵敏度;
- (5) 解向量元素  $x_3$  对系数矩阵  $\mathbf{A}$  的灵敏度。

解: 先求矩阵  $\mathbf{A}$  的逆矩阵  $\mathbf{C}$ :

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -5 \\ 0 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

由式 (4-41), 得到:

$$\lambda(\mathbf{X}, b_1) = \begin{bmatrix} \lambda(x_1, b_1) \\ \lambda(x_2, b_1) \\ \lambda(x_3, b_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

根据式 (4-43), 得到:

$$\lambda(X, a_{12}) = \begin{bmatrix} \lambda(x_1, a_{12}) \\ \lambda(x_2, a_{12}) \\ \lambda(x_3, a_{12}) \end{bmatrix} = -x_2 \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix} = -\frac{2}{15} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由式 (4-42), 得到:

$$\lambda(x_3, B) = \begin{bmatrix} \lambda(x_3, b_1) \\ \lambda(x_3, b_2) \\ \lambda(x_3, b_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{31} \\ c_{32} \\ c_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

根据式 (4-44), 得到:

$$\begin{aligned} \lambda(x_3, A) &= \begin{bmatrix} \lambda(x_3, a_{11}) & \lambda(x_3, a_{12}) & \lambda(x_3, a_{13}) \\ \lambda(x_3, a_{21}) & \lambda(x_3, a_{22}) & \lambda(x_3, a_{23}) \\ \lambda(x_3, a_{31}) & \lambda(x_3, a_{32}) & \lambda(x_3, a_{33}) \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} c_{31} \\ c_{32} \\ c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -5 & -10 & -5 \\ 10 & 20 & 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 4.2 电力网络的灵敏度

### 4.2.1 线性网络的灵敏度

物理元件总是以支路的形式出现在网络中, 因此网络灵敏度关心支路量的变化 (支路导纳和支路电源) 对节点电压的影响。

计算网络灵敏度的基本思路是: 在代数方程组灵敏度的基础上, 利用关联矩阵得到节点电压和支路量的灵敏度关系。

### 4.2.2 摄动方程

利用节点阻抗矩阵  $Z$  和节点导纳矩阵  $Y$  的互逆关系:

$$Z = Y^{-1} \quad (4-45)$$

并套用代数方程组摄动方程的形式, 可以直接得到如下的摄动方程:

$$d\dot{U}_N = Z d\dot{I}_N - Z dY \dot{U}_N$$

设  $A$  为关联矩阵。将如下的基本关系:

$$Y = Ay_B A^T, \quad \dot{U}_B = A^T \dot{U}_N, \quad \dot{I}_N = A \dot{I}_B$$

代入式 (4-45), 得到:

$$d\dot{U}_N = Z A d\dot{I}_B - Z A dy_B \dot{U}_B$$

### 4.2.3 节点-支路阻抗矩阵

定义节点-支路阻抗矩阵如下：

$$\mathbf{Z}_\alpha = \mathbf{Z}\mathbf{A} \quad (4-46)$$

$$\mathrm{d}\dot{\mathbf{U}}_N = \mathbf{Z}_\alpha \mathrm{d}\dot{\mathbf{I}}_B - \mathbf{Z}_\alpha \mathrm{d}\mathbf{y}_B \dot{\mathbf{U}}_B \quad (4-47)$$

节点-支路阻抗矩阵  $\mathbf{Z}_\alpha$  的阶数为  $n \times b$ ，表达支路与节点之间的阻抗关系。

用符号  $\mathbf{Z}_{\alpha,k}^c$  表示矩阵  $\mathbf{Z}_\alpha$  的第  $k$  列向量，根据式 (4-46)，于是，节点电压关于支路导纳和支路电流源的摄动方程为：

$$\mathbf{Z}_{\alpha,k}^c = \mathbf{Z}\mathbf{A}_k^c \quad (k=1,2,\dots,b) \quad (4-48)$$

其中， $\mathbf{A}_k^c$  是关联矩阵  $\mathbf{A}$  的第  $k$  列。

支路  $k$  与节点  $i$  的关联情况不同， $\mathbf{Z}_{\alpha,k}^c$  的取值不同。概括起来有以下 3 种情况：

(1) 支路  $k$  与节点  $i$  正关联，与节点  $j$  负关联，则：

$$\mathbf{Z}_{\alpha,k}^c = \mathbf{Z}_i^c - \mathbf{Z}_j^c \quad (4-49)$$

其中， $\mathbf{Z}_i^c$  和  $\mathbf{Z}_j^c$  为矩阵  $\mathbf{Z}$  的第  $i$  列和第  $j$  列。

(2) 支路  $k$  与节点  $i$  负关联，与节点  $j$  正关联，则：

$$\mathbf{Z}_{\alpha,k}^c = -\mathbf{Z}_i^c + \mathbf{Z}_j^c \quad (4-50)$$

(3) 支路  $k$  是接地支路，只与节点  $i$  关联，则：

$$\mathbf{Z}_{\alpha,k}^c = \pm \mathbf{Z}_i^c \quad (4-51)$$

其中，支路  $k$  与节点  $i$  正关联取正号，与节点  $i$  负关联取负号。

用符号  $\mathbf{Z}_{\alpha,i}^r$  表示矩阵  $\mathbf{Z}_\alpha$  的第  $i$  行向量，那么：

$$\mathbf{Z}_{\alpha,i}^r = \mathbf{Z}_i^r \mathbf{A} \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (4-52)$$

其中， $\mathbf{Z}_i^r$  是矩阵  $\mathbf{Z}$  的第  $i$  行。

### 4.2.4 一般网络方程的灵敏度

设  $\mathbf{Z}_\alpha(i,k)$  为矩阵  $\mathbf{Z}_\alpha$  的任意元素。以式 (4-47) 的摄动方程为基础，节点电压对支路的灵敏度为：

$$\lambda(\dot{\mathbf{U}}_i, \dot{\mathbf{I}}_{Bk}) = \mathbf{Z}_\alpha(i,k) \quad (i=1,2,\dots,n; k=1,2,\dots,b) \quad (4-53)$$

$$\lambda(\dot{\mathbf{U}}_i, \mathbf{y}_{Bk}) = -\mathbf{Z}_\alpha(k,i) \dot{\mathbf{U}}_{Bk} \quad (i=1,2,\dots,n; k=1,2,\dots,b) \quad (4-54)$$

设  $\mathbf{Z}_{\alpha,k}^c$  和  $\mathbf{Z}_{\alpha,i}^r$  分别为矩阵  $\mathbf{Z}_\alpha$  的列向量和行向量。根据式 (4-53) 得到节点电压向量  $\dot{\mathbf{U}}_N$  对任意支路电流  $\dot{\mathbf{I}}_{Bk}$  的灵敏度：

$$\lambda(\dot{\mathbf{U}}_N, \dot{\mathbf{I}}_{Bk}) = \mathbf{Z}_{\alpha,k}^c \quad (k=1,2,\dots,b) \quad (4-55)$$

和任意节点电压  $\dot{\mathbf{U}}_i$  对支路电流源向量  $\dot{\mathbf{I}}_B$  的灵敏度：

$$\lambda(\dot{U}_i, \dot{I}_B) = \mathbf{Z}_{\alpha,i}^{rT} \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (4-56)$$

根据式(4-54)得到节点电压向量  $\dot{U}_N$  对任意支路导纳  $y_{Bk}$  的灵敏度:

$$\lambda(\dot{U}_N, y_{Bk}) = -\dot{U}_{Bk} \mathbf{Z}_{\alpha,k}^c \quad (k=1,2,\dots,b) \quad (4-57)$$

和任意节点电压  $\dot{U}_i$  对支路导纳矩阵  $\mathbf{y}_B$  的灵敏度:

$$\lambda(\dot{U}_i, \mathbf{y}_B) = -\text{diag}(\dot{U}_B) \mathbf{Z}_{\alpha,i}^{rT} \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (4-58)$$

对于节点方程, 节点电压是网络基本状态量。各种网络函数  $\alpha$  都可以看作是节点电压的函数, 即:

$$\gamma = f(\dot{U}_N) \quad (4-59)$$

以节点电压对支路的灵敏度为基础, 可以得到任意网络函数  $\gamma$  对支路的灵敏度。计算公式如下:

$$\lambda(\gamma, y_{Bk}) = \frac{\partial \gamma}{\partial y_{Bk}} = \frac{\partial \gamma}{\partial \dot{U}_N} \frac{\partial \dot{U}_N}{\partial y_{Bk}} = \frac{\partial \gamma}{\partial \dot{U}_N} \lambda(\dot{U}_N, y_{Bk}) \quad (k=1,2,\dots,b) \quad (4-60)$$

$$\lambda(\gamma, \dot{I}_{Bk}) = \frac{\partial \gamma}{\partial \dot{I}_{Bk}} = \frac{\partial \gamma}{\partial \dot{U}_N} \frac{\partial \dot{U}_N}{\partial \dot{I}_{Bk}} = \frac{\partial \gamma}{\partial \dot{U}_N} \lambda(\dot{U}_N, \dot{I}_{Bk}) \quad (k=1,2,\dots,b) \quad (4-61)$$

#### 4.2.5 电力网络方程的灵敏度

极坐标形式的节点功率方程为:

$$\begin{cases} \mathbf{P}_N = \mathbf{P}_N(\mathbf{U}_N, \boldsymbol{\theta}_N) \\ \mathbf{Q}_N = \mathbf{Q}_N(\mathbf{U}_N, \boldsymbol{\theta}_N) \end{cases}$$

其中,  $\mathbf{P}_N$  为 PQ 节点和 PV 节点的有功功率向量;  $\mathbf{Q}_N$  为 PQ 节点的无功功率向量;  $\mathbf{U}_N$  为 PQ 节点的电压幅值向量;  $\boldsymbol{\theta}_N$  为 PQ 节点和 PV 节点的电压相角向量。

上式的摄动方程为:

$$\begin{cases} d\mathbf{P}_N = \frac{\partial \mathbf{P}_N(\mathbf{U}_N, \boldsymbol{\theta}_N)}{\partial \boldsymbol{\theta}_N} d\boldsymbol{\theta}_N + \frac{\partial \mathbf{P}_N(\mathbf{U}_N, \boldsymbol{\theta}_N)}{\partial \mathbf{U}_N} d\mathbf{U}_N \\ d\mathbf{Q}_N = \frac{\partial \mathbf{Q}_N(\mathbf{U}_N, \boldsymbol{\theta}_N)}{\partial \boldsymbol{\theta}_N} d\boldsymbol{\theta}_N + \frac{\partial \mathbf{Q}_N(\mathbf{U}_N, \boldsymbol{\theta}_N)}{\partial \mathbf{U}_N} d\mathbf{U}_N \end{cases}$$

利用极坐标形式的修正方程式:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_N &= \frac{\partial \mathbf{P}_N(\mathbf{U}_N, \boldsymbol{\theta}_N)}{\partial \boldsymbol{\theta}_N}, & \mathbf{N}_N &= \frac{\partial \mathbf{P}_N(\mathbf{U}_N, \boldsymbol{\theta}_N)}{\partial \mathbf{U}_N} \\ \mathbf{J}_N &= \frac{\partial \mathbf{Q}_N(\mathbf{U}_N, \boldsymbol{\theta}_N)}{\partial \boldsymbol{\theta}_N}, & \mathbf{L}_N &= \frac{\partial \mathbf{Q}_N(\mathbf{U}_N, \boldsymbol{\theta}_N)}{\partial \mathbf{U}_N} \end{aligned}$$

摄动方程表达为:

$$d\mathbf{P}_N = \mathbf{H}_N d\boldsymbol{\theta}_N + \mathbf{N}_N d\mathbf{U}_N \quad (4-62)$$

$$d\mathbf{Q}_N = \mathbf{J}_N d\boldsymbol{\theta}_N + \mathbf{L}_N d\mathbf{U}_N \quad (4-63)$$

利用 PQ 分解潮流的近似关系，得到如下近似的摄动方程表达：

$$dP_N \approx B'_N d\theta_N \quad (4-64)$$

$$dQ_N \approx B''_N dU_N \quad (4-65)$$

其中，矩阵  $B'_N$  和  $B''_N$  是阶数不同的节点导纳矩阵的虚部。 $B'_N$  的阶与 PQ 节点和 PV 节点的数量一致， $B''_N$  的阶与 PQ 节点的数量一致。

式 (4-64) 和式 (4-65) 是近似表达，由于系数矩阵  $B_N$  是常数矩阵，因此在对精度要求不高的情况下这种近似表达具有计算速度优势：只要网络结构不变化，摄动方程就不变化，相应的灵敏度也不会变化。

(1) 支路电压相角对有用功率的灵敏度。

支路电压相角与节点有用功率的关系即是功角关系。功角关系是电网运行很关心的问题。支路电压相角对节点有用功率的灵敏度描述了节点有用功率对支路相角的影响。

根据式 (4-62) 的摄动方程，得到：

$$d\theta_N = H_N^{-1} dP_N - H_N^{-1} N_N dU_N$$

根据节点与支路的关联关系，有：

$$d\theta_B = A^T H_N^{-1} dP_N - A^T H_N^{-1} N_N dU_N$$

其中， $A$  为关联矩阵，而  $\theta_B = A^T \theta_N$  为支路向量相角。这样得到如下的支路电压相角对节点有用功率的灵敏度矩阵：

$$\lambda(\theta_B, P_N) = A^T H_N^{-1} \quad (4-66)$$

这个灵敏度的近似表达为：

$$\lambda(\theta_B, P_N) \approx A^T B'_N{}^{-1} \quad (4-67)$$

(2) 电压幅值对无用功率的灵敏度。

无用功率与节点电压关系紧密，通过无用功率的调节确保节点电压的合格率是电网基本的运行控制手段。此时需要节点电压幅值和节点无用功率之间的灵敏度。

根据式 (4-63) 可以直接得到节点无用功率对电压幅值的灵敏度矩阵：

$$\lambda(Q_N, U_N) = L_N \quad (4-68)$$

由式 (4-63) 得到：

$$dU_N = L_N^{-1} dQ_N - L_N^{-1} J_N d\theta_N$$

因此， $L_N^{-1}$  为节点电压幅值对无用功率的灵敏度，即：

$$\lambda(U_N, Q_N) = L_N^{-1} \quad (4-69)$$

显然：

$$\lambda(Q_N, U_N) \lambda(U_N, Q_N) = E_n$$

其中， $E_n$  是单位矩阵。

上面的灵敏度公式可以近似为：

$$\lambda(Q_N, U_N) \approx B_N \quad (4-70)$$

$$\lambda(U_N, Q_N) = B_N^{-1} \quad (4-71)$$

(3) 电压幅值的灵敏度。

许多情况下关心不同节点之间的相互影响，需要计算不同节点之间电压幅值的灵敏度。

如果忽略矩阵的作用，即  $J_N = 0$ ，在无功功率不变的情况下，式 (4-63) 为：

$$L_N dU_N = 0$$

将节点电压幅值向量按发电机和负荷划分，得到：

$$L_g dU_g + L_l dU_l = 0$$

式中，下标  $g$  表示发电机节点，下标  $l$  表示负荷节点。所以：

$$dU_l = -L_l^{-1} L_g dU_g \quad (4-72)$$

因此，负荷节点电压幅值对发电机节点电压幅值的灵敏度为：

$$\lambda(U_l, U_g) = -L_l^{-1} L_g \quad (4-73)$$

可以近似为：

$$\lambda(U_l, U_g) = -B_l^{-1} B_g \quad (4-74)$$

采用矩阵部分求逆的方法，可以得到灵敏度矩阵中的任意灵敏度，计算过程与前面的讨论类似，具体不表。

## 4.3 增量网络法

本节和以下两节中，我们将介绍线性网络频域灵敏度计算的几种方法。本节所讨论的增量网络法是一种根据给定电网络，直接求网络变量对网络元件参数的非归一化灵敏度的方法。

当网络的拓扑结构和激励固定时，任意支路电流、电压均为网络元件参数的函数。下面通过分析支路导抗的微小改变所引起电流、电压的增量，进而确定网络变量对网络元件参数的非归一化灵敏度。

考查一个含线性时不变电阻、电感、电容元件、线性受控源和独立源的网络  $N$  的 KCL、KVL 方程分别为：

$$\alpha \dot{I}_B = 0 \quad (4-75)$$

$$\beta \dot{U}_B = 0 \quad (4-76)$$

式中， $\dot{I}_B$ 、 $\dot{U}_B$  分别表示网络  $N$  的复频域支路电流向量和支路电压向量。此处及以下各节一般均略去复频变量符号  $(S)$ 。

如果网络  $N$  中某些支路导抗发生微小改变，则各支路电流、电压也会有微小改变，我们将此网络称为“微扰网络” (Perturbed Network)，用符号  $N_p$  表示。由于网络  $N_p$  与  $N$  有相同的拓扑结构，两者有相同的关联矩阵和基本回路矩阵，故  $N_p$  的 KCL、KVL 方程为：

$$\alpha(\dot{I}_B + \Delta \dot{I}_B) = 0 \quad (4-77)$$

$$\beta(\dot{U}_B + \Delta \dot{U}_B) = 0 \quad (4-78)$$

由式 (4-75) 式 (4-78) 可得:

$$\alpha \Delta \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{B}} = \mathbf{0} \quad (4-79)$$

$$\beta \Delta \dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{B}} = \mathbf{0} \quad (4-80)$$

将以上两式与式 (4-75)、(4-76) 相比较, 不难看出, 增量电流  $\Delta \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{B}}$ 、增量电压  $\Delta \dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{B}}$  和原网络电流  $\dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{B}}$ 、电压  $\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{B}}$  满足相同的拓扑约束关系。因此, 可以设想构造一个与原网络  $\mathbf{N}$  拓扑结构相同的“增量矩阵”  $\mathbf{N}_i$  (Incremental Network),  $\mathbf{N}_i$  的各支路电流、电压就是增量电流向量  $\Delta \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{B}}$ 、增量电压向量  $\Delta \dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{B}}$  的各元, 而  $\mathbf{N}_i$  的支路特性则应按  $\mathbf{N}_p$  中各支路增量电流与增量电压间的关系确定。

设原网络  $\mathbf{N}$  的第  $k$  支路阻抗为  $Z_{Bk}$ , 则该支路电压、电流关系方程为:

$$\dot{\mathbf{U}}_{Bk} = Z_{Bk} \dot{\mathbf{I}}_{Bk} \quad (4-81)$$

当网络中某些参数有微小变动时, 在微扰网络  $\mathbf{N}_p$  中的第  $k$  支路特性为:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}}_{Bk} + \Delta \dot{\mathbf{U}}_{Bk} &= (Z_{Bk} + \Delta Z_{Bk})(\dot{\mathbf{I}}_{Bk} + \Delta \dot{\mathbf{I}}_{Bk}) \\ &= Z_{Bk} \dot{\mathbf{I}}_{Bk} + Z_{Bk} \Delta \dot{\mathbf{I}}_{Bk} + \dot{\mathbf{I}}_{Bk} \Delta Z_{Bk} + \Delta Z_{Bk} \Delta \dot{\mathbf{I}}_{Bk} \end{aligned} \quad (4-82)$$

由式 (4-82) 减去式 (4-81), 并忽略高阶无穷小项  $\Delta Z_{Bk} \Delta \dot{\mathbf{I}}_{Bk}$ , 得:

$$\Delta \dot{\mathbf{U}}_{Bk} = Z_{Bk} \Delta \dot{\mathbf{I}}_{Bk} + \dot{\mathbf{I}}_{Bk} \Delta Z_{Bk} \quad (4-83)$$

上式表明, 在增量网络  $\mathbf{N}_i$  中, 第  $k$  支路应由原网络  $\mathbf{N}$  的第  $k$  支路阻抗  $Z_{Bk}$  与电压为  $\dot{\mathbf{I}}_{Bk} \Delta Z_{Bk}$  的电压源串联构成, 如表 4-1(a) 所示。

表 4-1 增量网络的构成

	原网络 $\mathbf{N}$ 中的元件	增量网络 $\mathbf{N}_i$ 中的对应元件
(a)		
(b)		
(c)		
(d)		



续表

	原网络 N 中的元件	增量网络 N <sub>i</sub> 中的对应元件
(e)		
(f)		
(g)		
(h)		

如果网络 N 中第  $k$  支路特性用导纳参数表征, 即:

$$\dot{I}_{Bk} = Z_{Bk} \dot{U}_{Bk} \quad (4-84)$$

按照相同的推理可得, 在网络发生扰动后增量电流与增量电压间的关系方程:

$$\Delta \dot{I}_{Bk} = Y_{Bk} \Delta \dot{U}_{Bk} + \dot{U}_{Bk} \Delta Y_{Bk} \quad (4-85)$$

上式可解释为, 在增量网络  $N_i$  中, 第  $k$  支路由导纳  $Y_{Bk}$  与电流  $\dot{U}_{Bk} \Delta Y_{Bk}$  的电流源并联构成, 如表 4-1(b)所示。

对于四种线性受控源, 其在增量网络中的对应元件见表 4-1(c)~(f)。其中下标  $k$  表示控制支路、 $t$  表示受控支路。现就其中电流控制电压源分析如下, 其余类推。

在原网络 N 中, CCVS 的元件特性为:

$$\dot{U}_{Bt} = r_m \dot{I}_{Bk} \quad (4-86)$$

在微扰网络  $N_p$  中, 考虑到电流、电压以及控制参数  $r_m$  的微小改变, 有:

$$\dot{U}_{Bt} + \Delta \dot{U}_{Bt} = (r_m + \Delta r_m)(\dot{I}_{Bk} + \Delta \dot{I}_{Bk}) \quad (4-87)$$

由式 (4-85)、式 (4-86), 并忽略高阶无穷小项, 得:

$$\Delta \dot{U}_{Bt} = r_m \Delta \dot{I}_{Bk} + \dot{I}_{Bk} \Delta r_m \quad (4-88)$$

根据上式可绘出表 4-1(e)所示的 CCVS 在增量网络中的对应元件。

至于独立电压源与独立电流源, 由于讨论网络灵敏度问题的前提是就固定的网络拓扑结构和激励而言的, 因此在网络中某些元件参数有微小改变时, 电压源电压和电流源电流是不产生扰动的, 即

$$\Delta \dot{U}_s = 0, \quad \Delta \dot{I}_s = 0$$

故在增量网络  $N_i$  中, 原电压源支路对应于一个短路支路, 电流源支路对应于一个开路支路, 如表 4-1(g)、(h)所示。

表 4-1 中列出了各类常用网络元件在增量网络中所对应的支路, 据此可由原网络  $N$  给出增量网络  $N_i$ 。求解增量网络, 便得到我们所感兴趣的网络变量增量与有关元件参数增量间的关系式, 进而导出相应的非归一化灵敏度。应当注意,  $Z$ 、 $Y$  和受控源在增量网络中的对应支路分别较原网络增加了串联电压源或并联电流源, 而这些电源的表达式均含原网络某些支路电流或电压, 因此, 求解增量网络之前必须先对原网络求解。

**例 4-2** 在图 4-1 所示有源网络中, 各元件参数标称值为:  $G_1 = G_2 = G_3 = 1\text{S}$ ,  $R_4 = 1\Omega$ ,  $R_5 = 1\Omega$ ,  $r = 4$ 。用增量网络法求输出电压  $U_O$  对  $G_1$ 、 $G_2$  及  $r$  的偏导数。设转移函数  $T = \frac{U_O}{U_S}$ , 求偏导数  $\frac{\partial T}{\partial r}$ 。图中电压源  $U_S = 8\text{V}$ 。

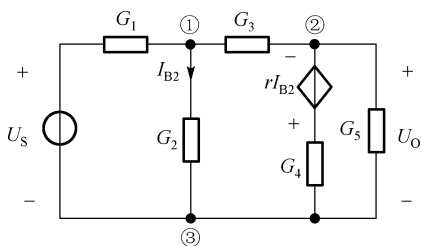


图 4-1 有源网络

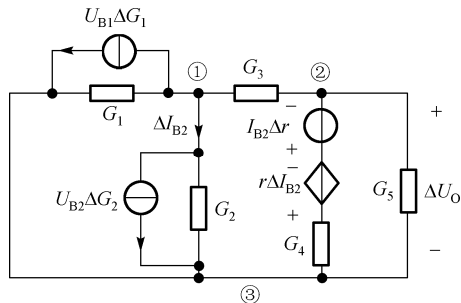


图 4-2 增量网络

**解:** 考虑参数  $R_1$ 、 $R_2$  及  $r$  可能发生微小改变的情形, 构造增量网络, 如图 4-2 所示。增量网络中含原网络支路电压  $U_{B1}$ 、 $U_{B2}$  以及支路电流  $I_{B2}$  的解, 故首先对原网络求解。

以节点③为参考节点, 写出原网络的节点方程:

$$\begin{cases} (G_1 + G_2 + G_3)U_1 - G_3U_2 = G_1U_S \\ (-G_3 + G_4rG_2)U_1 + (G_3 + G_4 + G_5)U_2 = 0 \end{cases}$$

联立求解上式可得:

$$\begin{cases} U_1 = 2\text{V} \\ U_2 = -2\text{V} \end{cases}$$

则支路电压  $\begin{cases} U_{B1} = U_1 - U_S = -6\text{V} \\ U_{B2} = U_1 = 2\text{V} \end{cases}$ , 支路电流  $I_{B2} = 2\text{A}$ 。

对增量网络  $N_i$  求解  $\Delta U_O$ , 仍采用节点分析法。  $N_i$  的方程为:

$$\begin{cases} (G_1 + G_2 + G_3)\Delta U_1 - G_3\Delta U_2 = -U_{B1}\Delta G_1 - U_{B2}\Delta G_2 \\ (-G_3 + G_4rG_2)\Delta U_1 + (G_3 + G_4 + G_5)\Delta U_2 = G_4I_{B2}\Delta r - rG_4U_{B2}\Delta G_2 \end{cases}$$

求得  $\Delta U_1$ 、 $\Delta U_2$  的表达式为:

$$\begin{cases} \Delta U_1 = \frac{1}{6}(9\Delta G_1 - 7\Delta G_2 + \Delta r) \\ \Delta U_2 = \frac{1}{2}(-3\Delta G_1 - 3\Delta G_2 + \Delta r) \end{cases}$$

故

$$\Delta U_0 = \Delta U_2 = \frac{1}{2}(\Delta G_1 - 3\Delta G_2 + \Delta r)$$

为求偏导数  $\frac{\partial U_0}{\partial G_1}$ ，令上式中  $\Delta G_2 = 0$ ， $\Delta r = 0$ ，并令  $\Delta G_1 \rightarrow 0$ ，于是有：

$$\frac{\partial U_0}{\partial G_1} = -\frac{3}{2}$$

同理可得：

$$\frac{\partial U_0}{\partial G_2} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial r} = \frac{1}{2}$$

转移函数  $T$  对  $\beta$  的偏导数为：

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{U_0}{U_s} \right) = \frac{1}{U_s} \cdot \frac{\partial U_0}{\partial r} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

比较上例中增量网络  $N_i$  的节点方程和原网络  $N$  的节点方程，不难看出两者左端系数是相同的，换言之，两组节点方程的节点导纳矩阵是相同的，这是由于  $N_i$  与  $N$  两者的非强制网络完全相同所致。基于这一分析，无论我们采用何种网络方程法，如果列出网络  $N$  的方程为：

$$PX = Y \quad (4-89)$$

则网络  $N_i$  的方程必为：

$$P\Delta X = \tilde{Y} \quad (4-90)$$

显然，在求解网络  $N$  时所得到的式 (4-89) 右端系数矩阵  $P$  的逆矩阵可直接用以求解网络  $N_i$ ，从而使计算量大为减少。下面以节点分析为例讨论上述算法，支路划分采用第2章中定义的复合支路。

设网络  $N$  的关联矩阵为  $A$ ，支路导纳矩阵为  $y_B$ ，节点电压、支路电流源电流及支路电压源电压向量分别为  $\dot{U}_N$ 、 $\dot{I}_S$  和  $\dot{U}_S$ 。

网络  $N$  的节点方程为：

$$Ay_B A^T \dot{U}_N = A(\dot{I}_S - y_B \dot{U}_N) \quad (4-91)$$

当支路导纳矩阵有微小改变  $\Delta y_B$  时，节点电压向量亦发生微小改变  $\Delta \dot{U}_N$ ，用类似于导出式：

$$Ay_B A^T \Delta \dot{U}_N + A\Delta y_B A^T \dot{U}_N = -A\Delta y_B \dot{U}_S \quad (4-92)$$

即：

$$y_B \Delta \dot{U}_N = -A\Delta y_B (\dot{U}_S + A^T \dot{U}_N) \quad (4-93)$$

注意到支路电压向量  $\dot{U}_B$  与节点电压向量  $\dot{U}_N$  间的关系：

$$\dot{U}_B = A^T \dot{U}_N \quad (4-94)$$

以及由复合支路中各部分电压间的关系所给出的无源元件电压向量:

$$\dot{U}_P = \dot{U}_B + \dot{U}_S \quad (4-95)$$

式(4-93)可改写为:

$$\mathbf{y}_B \Delta \dot{U}_N = -\mathbf{A} \Delta \mathbf{y}_B (\dot{U}_S + \dot{U}_B) \quad (4-96)$$

$$\mathbf{Y} \Delta \dot{U}_N = -\mathbf{A} \Delta \mathbf{Y} \dot{U}_P \quad (4-97)$$

如果网络 N 中全部导抗元件均以导纳参数表示, 且受控源一律换为等效的电压控制电流源, 按表 4-1 规则绘出其增量网络  $N_i$ , 对  $N_i$  列出节点方程, 直接便能得到式(4-97)的方程。根据式(4-97)可求  $\dot{U}_N$  对任意参数  $x$  的偏导数:

$$\frac{\partial}{\partial x} \dot{U}_N = -\mathbf{Y}^{-1} \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{y}_B \dot{U}_P \quad (4-98)$$

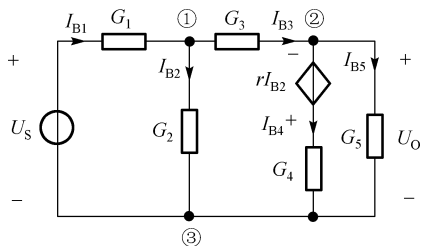


图 4-3 电力网络图

**例 4-3** 用式(4-98)求图 4-1 网络的电压  $U_o$  对电导  $G_1$ 、 $G_2$  和  $r$  的偏导数。图中各参数与例 4-2 相同。

**解:** 将图 4-1 重绘如图 4-3 所示, 图中标出了支路的参考方向。

关联矩阵:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

支路导纳矩阵:

$$\mathbf{y}_B = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 \\ 0 & G_4 r G_2 & 0 & 0 & G_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

节点导纳矩阵:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \mathbf{y}_B \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 \\ -G_3 + G_4 r G_2 & G_3 + G_4 + G_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

对  $\mathbf{Y}$  求逆:

$$\mathbf{Y}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

节点电源电流:

$$\dot{I}_N = \mathbf{A}(\dot{I}_S - \mathbf{y}_B \dot{U}_S) = -\mathbf{A} \mathbf{y}_B \dot{U}_S = - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

原网络节点方程的解：

$$\dot{U}_N = Y^{-1} \dot{I}_N = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

支路电压向量：

$$\dot{U}_B = A^T \dot{U}_N = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

无源元件电压向量：

$$\dot{U}_P = \dot{U}_B + \dot{U}_S = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

利用式 (4-98)，有：

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 \\ 0 & G_4 r G_2 & 0 & 0 & G_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

为求  $\frac{\partial U_0}{\partial G_1}$ ，令  $x = G_1$ ，得：

$$\frac{\partial U_0}{\partial G_1} = \frac{\partial U_2}{\partial G_1} = -\frac{1}{12} \times 3 \times 6 = -\frac{3}{2}$$

同理：

$$\frac{\partial U_0}{\partial G_2} = \frac{\partial U_2}{\partial G_2} = -\frac{1}{12} \times (-3 \times 1 + 3 \times 4) \times 2 = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial r} = \frac{\partial U_2}{\partial r} = -\frac{1}{12} \times 3 \times -2 = \frac{1}{2}$$

读者可对比检验例 4-3 和例 4-2 的计算结果。

以上两例均采用节点分析，前者为观察法，后者为矩阵分析法。需要指出，增量网络法的应用是可以基于任一种网络方程法的。现将用增量网络法求网络变量（或网络函数）的非归一化灵敏度的基本步骤归纳如下。

(1) 根据题意所要求的非归一化灵敏度确定哪些元件参数是可微变参数，构造相应的增量网络  $N_i$ 。

- (2) 解原网络  $N$ ，求出增量网络  $N_i$  中所需原网络  $N$  的网络变量。
- (3) 解增量网络  $N_i$ ，导出有关网络变量增量与各可微变参量。
- (4) 应用第(3)步所得关系式，求网络变量对元件参数的偏导数。将以上结果除以激励电压（或电流），便可得到有关网络函数对该元件参数的偏导数。

## 4.4 伴随网络法

伴随网络法是计算任意网络函数对网络中各元件参数的非归一化灵敏度的有效方法。

### 4.4.1 伴随网络

两个线性时不变的集总网络  $N$  与  $\hat{N}$  如果满足下列三个条件，则称它们互为伴随网络。

- (1) 网络  $N$  和  $\hat{N}$  的拓扑结构相同，即关联矩阵  $A = \hat{A}$ 。
- (2) 网络  $N$  和  $\hat{N}$  的非独立源支路的参数矩阵间有以下关系：
  - a. 如果支路阻抗矩阵  $z_B$ 、 $\hat{z}_B$  存在，则：

$$z_B^T = \hat{z}_B \quad (4-99)$$

- b. 如果支路导纳矩阵  $y_B$ 、 $\hat{y}_B$  存在，则：（符号统一）

$$y_B^T = \hat{y}_B \quad (4-100)$$

伴随网络的定义明确地给出了对于已知网络  $N$  构造其伴随网络  $\hat{N}$  的方法。应当注意构造伴随网络时的支路划分，独立源单独作为一个支路，受控源必须采用其二端口模型，即包括控制支路和受控支路，控制电流视为一个短路支路的电流，控制电压视为一个开路支路的电压。

**例 4-4** 对于图 4-4 所示网络  $N$  构成其伴随网络  $\hat{N}$ 。

**解：**图 4-4 所示网络的支路导纳矩阵为：

$$y_B = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 r G_3 & G_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 \end{bmatrix}$$

则伴随网络的支路导纳矩阵为：

$$\hat{y}_B = y_B^T = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & G_2 r G_3 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 \end{bmatrix}$$

由  $\hat{y}_B$  所给出的支路特性有：

$$\hat{I}_2 = G_2 r G_3 \hat{U}_{B3}$$

$\hat{N}$  的所有二端导抗元件支路特性均与原网络  $N$  中的对应支路特性相同。据此，构造伴随网络  $\hat{N}$ ，如图 4-5 所示。可以看出，原网络  $N$  中的 CCVS 所对应的伴随网络  $\hat{N}$  中的元件为 CCVS，且控制参数不变，但控制支路与受控支路互换位置。

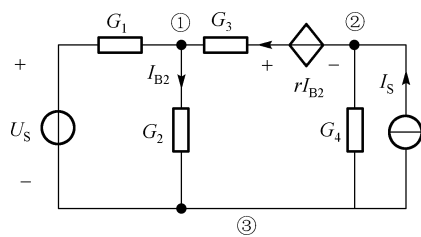


图 4-4 网络  $N$

在以上例子中, 由已知网络  $N$  构成其伴随网络  $\hat{N}$ , 是根据伴随网络的定义, 通过建立  $N$  和  $\hat{N}$  的非独立源支路导纳矩阵或混合参数矩阵来构造伴随网络  $\hat{N}$  的。实际上, 我们可以采取更简便的方法, 即事先按照伴随网络的定义确定出各类网络元件在伴随网络中的对应元件, 如表 4-2 所示。这样, 借助查表便能直接由网络  $N$  得到其伴随网络  $\hat{N}$ , 而不必经由建立非独立源支路参数矩阵的步骤。从表 4-2 中不难看出, 所有互易元件在伴随网络中的对应元件与其自身相同。

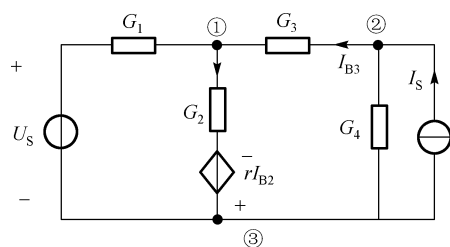
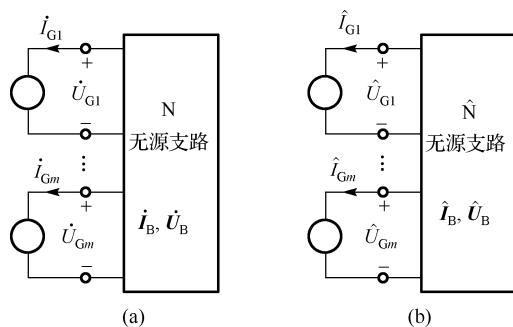
图 4-5 伴随网络  $\hat{N}$ 

表 4-2 伴随网络的构成

原网络 $N$ 中的元件	伴随网络 $\hat{N}$ 中对应元件

为了灵敏度计算及其他应用的需要。将网络  $N$  和伴随网络  $\hat{N}$  的全部独立源抽出, 形成多端口网络, 如图 4-6 所示。以下讨论网络  $N$  和  $\hat{N}$  的端口参数间的关系。

图 4-6 网络 N 和伴随网络  $\hat{N}$  图

网络  $N$  和  $\hat{N}$  的每一条支路（内部的和抽出的）电流、电压取一致参考方向。内部无源支路电流、电压向量用  $\dot{\mathbf{I}}_B$ 、 $\dot{\mathbf{U}}_B$  及  $\hat{\mathbf{I}}_B$ 、 $\hat{\mathbf{U}}_B$  表示。如果支路阻抗矩阵存在，则

$$\dot{\mathbf{U}}_B = \mathbf{z}_B \dot{\mathbf{I}}_B \quad (4-101)$$

$$\hat{\mathbf{U}}_B = \hat{\mathbf{z}}_B \hat{\mathbf{I}}_B \quad (4-102)$$

且有

$$\mathbf{z}_B = \hat{\mathbf{z}}_B \quad (4-103)$$

端口电流、电压向量用  $\dot{\mathbf{I}}_G$ 、 $\dot{\mathbf{U}}_G$  及  $\hat{\mathbf{I}}_G$ 、 $\hat{\mathbf{U}}_G$  表示。如果多端口网络的开路阻抗矩阵存在，则：

$$\dot{\mathbf{U}}_G = -\mathbf{Z}_{OC} \dot{\mathbf{I}}_G \quad (4-104)$$

$$\hat{\mathbf{U}}_G = -\hat{\mathbf{Z}}_{OC} \hat{\mathbf{I}}_G \quad (4-105)$$

式中，负号是考虑到开路阻抗矩阵是在端口支路电流、电压参考方向相反的情形下定义的。

下面将证明：

$$\hat{\mathbf{Z}}_{OC} = \mathbf{Z}_{OC}^T \quad (4-106)$$

证明：根据特勒根定理有：

$$\hat{\mathbf{I}}^T \dot{\mathbf{U}} - \dot{\mathbf{U}}^T \hat{\mathbf{I}} = 0 \quad (4-107)$$

按前述支路划分，上式中各电流、电压向量可写成如下分块形式：

$$\dot{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_G \\ \dot{\mathbf{I}}_B \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_G \\ \dot{\mathbf{U}}_B \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{I}}_G \\ \hat{\mathbf{I}}_B \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_G \\ \hat{\mathbf{U}}_B \end{bmatrix} \quad (4-108)$$

代入式 (4-107)，得：

$$(\hat{\mathbf{I}}_G^T \dot{\mathbf{U}}_G + \hat{\mathbf{I}}_B^T \dot{\mathbf{U}}_B) - (\dot{\mathbf{U}}_G^T \hat{\mathbf{I}}_G + \dot{\mathbf{U}}_B^T \hat{\mathbf{I}}_B) = 0 \quad (4-109)$$

即

$$\hat{\mathbf{I}}_B^T \dot{\mathbf{U}}_B - \dot{\mathbf{U}}_B^T \hat{\mathbf{I}}_B = -\hat{\mathbf{I}}_G^T \dot{\mathbf{U}}_G + \dot{\mathbf{U}}_G^T \hat{\mathbf{I}}_G \quad (4-110)$$

式 (4-110) 左端：



$$\hat{\mathbf{I}}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} \dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{I}}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} \mathbf{z}_{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{I}}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{B}} = 0$$

故式(4-110)右端应等于零,即:

$$-\hat{\mathbf{I}}_{\mathbf{G}}^{\mathrm{T}} \dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{G}} + \hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{G}}^{\mathrm{T}} \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{G}} = -\hat{\mathbf{I}}_{\mathbf{G}}^{\mathrm{T}} (-\mathbf{Z}_{\mathrm{OC}} \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{G}}) + (-\hat{\mathbf{I}}_{\mathbf{G}}^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{Z}}_{\mathrm{OC}}^{\mathrm{T}}) \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{G}} = 0$$

若上式在  $\dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{G}}$  和  $\hat{\mathbf{I}}_{\mathbf{G}}$  取任意值时均成立,必须有:

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{OC}} = \hat{\mathbf{Z}}_{\mathrm{OC}}^{\mathrm{T}}$$

即  $\hat{\mathbf{Z}}_{\mathrm{OC}} = \mathbf{Z}_{\mathrm{OC}}^{\mathrm{T}}$  (证毕)。

如果多端口网络的短路导纳矩阵存在,即:

$$\dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{G}} = -\mathbf{Y}_{\mathrm{SC}} \dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{G}} \quad (4-111)$$

$$\hat{\mathbf{I}}_{\mathbf{G}} = -\hat{\mathbf{Y}}_{\mathrm{SC}} \hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{G}} \quad (4-112)$$

同样的方法可以证明:

$$\hat{\mathbf{Y}}_{\mathrm{SC}} = \mathbf{Y}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{T}} \quad (4-113)$$

#### 4.4.2 用伴随网络法计算灵敏度

研究图 4-6(a)所示线性  $n$  端口网络,如果我们能够计算端口参数  $\mathbf{z}_{\mathrm{OC}}$ 、 $\mathbf{y}_{\mathrm{SC}}$  对无源支路参数  $x$  的非归一化灵敏度,则可求得所关注的支路电压、电流对参数  $x$  的非归一化灵敏度。上述结论对于端口电压、端口电力灵敏度的情形是显而易见的,正如在 4-1 节中曾经给出的灵敏度公式,我们能够很容易地根据  $\frac{\partial \mathbf{Z}_{\mathrm{OC}}}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial \mathbf{Y}_{\mathrm{SC}}}{\partial x}$  分别得到  $\frac{\partial \dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{G}}}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{G}}}{\partial x}$ 。为了计算无源支路电压、电流的非归一化灵敏度,可以用附加端口的方法使这些电压、电流变为端口变量。例如,欲求第  $k$  无源支路电压的偏导数  $\frac{\partial \dot{U}_{\mathbf{B}k}}{\partial x}$ ,可在第  $k$  支路二端节点上并接以电流  $\dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{G}} = 0$  的电流源端口,

如图 4-7 所示,其端口电压  $\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{G}} = \dot{U}_{\mathbf{B}k}$  对参数  $x$  的偏导数等于所求的  $\frac{\partial \dot{U}_{\mathbf{B}k}}{\partial x}$ 。同理,欲求非

源支路电流的偏导数  $\frac{\partial \dot{I}_{\mathbf{B}k}}{\partial x}$ ,则在第  $k$  支路中串接以电压  $\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{G}} = 0$  的电压源端口,其端口电流

$\dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{G}} = \dot{I}_{\mathbf{B}k}$  对参数  $x$  的偏导数等于所求的  $\frac{\partial \dot{I}_{\mathbf{B}k}}{\partial x}$ 。根据以上分析,

为了得到可用以计算任何网络函数或网络变量对参数  $x$  的非归一化灵敏度的方法,我们仅需寻找计算  $\frac{\partial \mathbf{Z}_{\mathrm{OC}}}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial \mathbf{Y}_{\mathrm{SC}}}{\partial x}$  和  $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x}$  的方法。

设网络  $\mathbf{N}$  的微扰网络为  $\mathbf{N}_p$ ,伴随网络为  $\hat{\mathbf{N}}$ ,  $\dot{\mathbf{I}}$ 、 $(\dot{\mathbf{I}} + \Delta \dot{\mathbf{I}})$ 、 $\hat{\mathbf{I}}$  和  $\dot{\mathbf{U}}$ 、 $(\dot{\mathbf{U}} + \Delta \dot{\mathbf{U}})$ 、 $\hat{\mathbf{U}}$  分别为以上三个网络的电流向量和电压向量。由于  $\mathbf{N}$ 、 $\mathbf{N}_p$  和  $\hat{\mathbf{N}}$  三者有相同的拓扑结构,其中任意二端网络的电流、电压均满足特

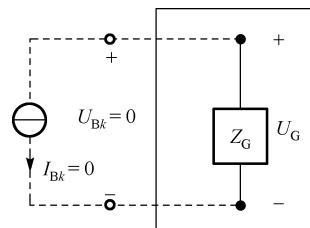


图 4-7 电力网络等效电路

勒根定理所给出的关系,故有:

$$\hat{\mathbf{I}}^T \dot{\mathbf{U}} - \hat{\mathbf{U}}^T \dot{\mathbf{I}} = 0 \quad (4-114)$$

$$\hat{\mathbf{I}}^T (\dot{\mathbf{U}} + \Delta \dot{\mathbf{U}}) - \hat{\mathbf{U}}^T (\dot{\mathbf{I}} + \Delta \dot{\mathbf{I}}) = 0 \quad (4-115)$$

式 (4-115) 减去式 (4-114), 得:

$$\hat{\mathbf{I}}^T \Delta \dot{\mathbf{U}} - \hat{\mathbf{U}}^T \Delta \dot{\mathbf{I}} = 0 \quad (4-116)$$

将上式中各电流、电压向量按端口支路与内部支路的划分写为式 (4-109) 的分块形式, 得

$$(\hat{\mathbf{I}}_G^T \Delta \dot{\mathbf{U}}_G + \hat{\mathbf{I}}_B^T \Delta \dot{\mathbf{U}}_B) - (\hat{\mathbf{U}}_G^T \Delta \dot{\mathbf{I}}_G + \hat{\mathbf{U}}_B^T \Delta \dot{\mathbf{I}}_B) = 0$$

即:

$$-\hat{\mathbf{I}}_G^T \Delta \dot{\mathbf{U}}_G + \hat{\mathbf{U}}_G^T \Delta \dot{\mathbf{I}}_G = \hat{\mathbf{I}}_B^T \Delta \dot{\mathbf{U}}_B - \hat{\mathbf{U}}_B^T \Delta \dot{\mathbf{I}}_B \quad (4-117)$$

式 (4-117) 是推导灵敏度计算公式的依据。以下按网络 N 的端口参数及内部 (非源支路) 参数的几种类型分别进行讨论。

(1) 多端口网络 N 的开路阻抗矩阵  $\mathbf{Z}_{OC}$  存在, 内部支路阻抗矩阵  $\mathbf{z}_B$  存在, 则:

$$\dot{\mathbf{U}}_B = \mathbf{z}_B \dot{\mathbf{I}}_B \quad (4-118)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_G = -\mathbf{Z}_{OC} \dot{\mathbf{I}}_G \quad (4-119)$$

当网络内部阻抗参数发生微小改变而引起网络扰动时, 以上两式的一阶近似为:

$$\Delta \dot{\mathbf{U}}_B = \Delta \mathbf{z}_B \dot{\mathbf{I}}_B + \mathbf{z}_B \Delta \dot{\mathbf{I}}_B \quad (4-120)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{U}}_G = -\Delta \mathbf{Z}_{OC} \dot{\mathbf{I}}_G - \mathbf{Z}_{OC} \Delta \dot{\mathbf{I}}_G \quad (4-121)$$

考虑到式 (4-120)、式 (4-118) 和式 (4-99), 式 (4-117) 右端可改写为:

$$\hat{\mathbf{I}}_B^T (\Delta \mathbf{z}_B \dot{\mathbf{I}}_B + \mathbf{z}_B \Delta \dot{\mathbf{I}}_B) - (\hat{\mathbf{z}}_B \hat{\mathbf{I}}_B)^T \Delta \dot{\mathbf{I}}_B = \hat{\mathbf{I}}_B^T \Delta \mathbf{z}_B \dot{\mathbf{I}}_B \quad (4-122)$$

同时, 由式 (4-121)、式 (4-119) 和式 (4-106), 式 (4-117) 左端应等于:

$$-\hat{\mathbf{I}}_G^T (-\Delta \mathbf{Z}_{OC} \dot{\mathbf{I}}_G - \mathbf{Z}_{OC} \Delta \dot{\mathbf{I}}_G) + (-\hat{\mathbf{Z}}_{OC} \hat{\mathbf{I}}_G)^T \Delta \dot{\mathbf{I}}_G = \hat{\mathbf{I}}_G^T \Delta \mathbf{Z}_{OC} \dot{\mathbf{I}}_G \quad (4-123)$$

于是

$$\hat{\mathbf{I}}_G^T \Delta \mathbf{Z}_{OC} \dot{\mathbf{I}}_G = \hat{\mathbf{I}}_B^T \Delta \mathbf{z}_B \dot{\mathbf{I}}_B \quad (4-124)$$

(2) 多端口网络 N 的短路导纳矩阵  $\mathbf{Y}_{SC}$  存在, 内部支路导纳矩阵  $\mathbf{y}_B$  存在, 则:

$$\dot{\mathbf{I}}_B = \mathbf{y}_B \dot{\mathbf{U}}_B \quad (4-125)$$

$$\dot{\mathbf{I}}_G = -\mathbf{Y}_{SC} \dot{\mathbf{U}}_G \quad (4-126)$$

当网络内部导纳参数发生微小改变而引起网络扰动时, 用导出式 (4-124) 相同的分析方法可得以下结果:

$$\hat{\mathbf{U}}_G^T \Delta \mathbf{Y}_{SC} \dot{\mathbf{U}}_G = \hat{\mathbf{U}}_B^T \Delta \mathbf{y}_B \dot{\mathbf{U}}_B \quad (4-127)$$

式 (4-127) 给出了网络 N 端口导纳参数增量与内部导纳参数增量间的关系, 用伴随网络法计算灵敏度的公式之二。下面就以上两种情形举例, 讨论如何用式 (4-124)、式 (4-127) 进行灵敏度计算。

**例 4-5** 图 4-8 所示网络的输入阻抗为  $Z_{IN}$ ， $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1\Omega$ ， $g = 1S$ 。用伴随网络法求灵敏度  $\frac{\partial Z_{IN}}{\partial R_1}$ 、 $\frac{\partial Z_{IN}}{\partial R_2}$  和  $\frac{\partial Z_{IN}}{\partial g}$ 。

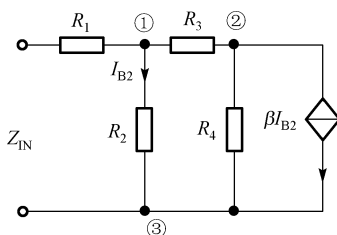
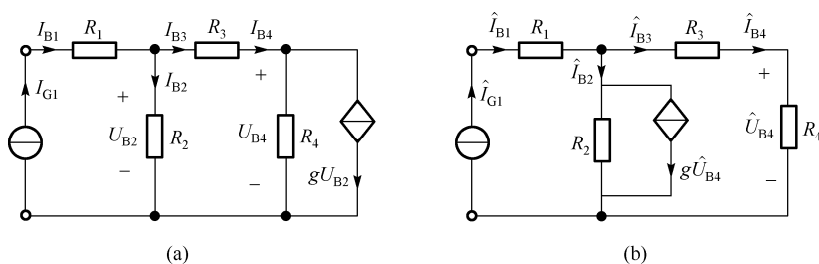


图 4-8 电力网络图

图 4-9 电力网络 N 的伴随网络  $\hat{N}$  图

**解：**为应用伴随网络法求灵敏度，重绘原网络 N 于图 4-9(a)，图中绘出了端口电流源  $I_{G1}$ ，并设置了支路电压  $U_{B4}$  作为 VCCS 的控制支路。又根据伴随网络的绘制规则，绘出网络 N 的伴随网络  $\hat{N}$ ，如图 4-9(b)所示。

根据公式 (4-124)，有：

$$\hat{\mathbf{I}}_G^T \Delta \mathbf{Z}_{OC} \dot{\mathbf{I}}_G = \hat{\mathbf{I}}_B^T \Delta \mathbf{z}_B \dot{\mathbf{I}}_B$$

本例中网络 N 为一端口网络， $\Delta \mathbf{Z}_{OC} = \Delta \mathbf{Z}_{IN}$ ， $\mathbf{I}_G = I_{G1}$ ， $\hat{\mathbf{I}}_G = \hat{I}_{G1}$ 。支路阻抗矩阵

$$\mathbf{z}_B = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 \\ 0 & -R_4 g R_2 & 0 & R_4 \end{bmatrix}$$

如果令  $I_{G1} = 2A$ ， $\hat{I}_{G1} = 2A$ ，分别求出  $\mathbf{I}_B$  和  $\hat{\mathbf{I}}_B$ ，则可得到输入阻抗的增量  $\Delta \mathbf{Z}_{IN}$  与网络内部非源支路参数增量间的关系式。

令网络 N 中  $I_{G1} = 2A$ ，可列出支路电流方程

$$\begin{cases} I_{B1} = I_{G1} \\ (I_{B3} - g I_{B2} R_2) R_4 + I_{B3} R_3 = I_{B2} R_2 \\ I_{B2} + I_{B3} = I_{G1} \\ I_{B3} = I_{B4} \end{cases}$$

解得

$$\mathbf{\hat{I}}_{\text{B}} = [2 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^{\text{T}}$$

令伴随网络  $\hat{\text{N}}$  中  $\hat{I}_{\text{G}1} = 2\text{A}$ ，可列出支路电流方程

$$\begin{cases} \hat{I}_{\text{B}1} = \hat{I}_{\text{G}1} \\ \hat{I}_{\text{B}3}(R_4 + R_3) = (\hat{I}_{\text{B}2} - g\hat{I}_{\text{B}3}R_4)R_2 \\ \hat{I}_{\text{B}2} + \hat{I}_{\text{B}3} = \hat{I}_{\text{G}1} \\ \hat{I}_{\text{B}3} = \hat{I}_{\text{B}4} \end{cases}$$

$$\mathbf{\hat{I}}_{\text{B}} = \left[ 2 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right]^{\text{T}}$$

根据式 (4-119) 有:

$$\begin{aligned} \Delta Z_{\text{IN}} &= \frac{1}{4} \mathbf{\hat{I}}_{\text{B}}^{\text{T}} \Delta \mathbf{z}_{\text{B}} \mathbf{I}_{\text{B}} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta R_3 & 0 \\ 0 & -\Delta R_4 g R_2 - R_4 \Delta g R_2 & 0 & \Delta R_4 \\ 0 & -R_4 g \Delta R_2 & 0 & \Delta R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

令网络内部支路参数 (即  $\mathbf{z}_{\text{B}}$  各元素) 逐一分别产生无限小的改变, 可得

$$\frac{\partial Z_{\text{IN}}}{\partial R_1} = \frac{1}{4} \times 2 \times 2 = 1$$

$$\frac{\partial Z_{\text{IN}}}{\partial R_2} = \frac{1}{4} \times \left( \frac{3}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times -1 \times 1 \right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial Z_{\text{IN}}}{\partial g} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times -1 \times 1 = -\frac{1}{8}$$

**例 4-6** 已知图 4-10 所示网络参数  $G_1 = G_2 = G_3 = 1\text{S}$ ,  $G_4 = 2\text{S}$ ,  $g = 5\text{S}$ , 其转移函数  $T = \frac{I_{\text{O}}}{U_{\text{IN}}}$ , 用伴随网络法求偏导数  $\frac{\partial T}{\partial G_1}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial G_2}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial g}$ 。

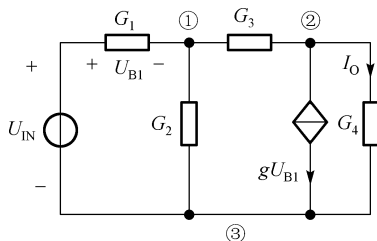


图 4-10 二端口网络 N

解: 由于我们所关注的输出变量  $I_O$  为  $G_4$  支路的电流, 故在  $G_4$  支路串接以电源电压  $U_{G2} = 0$  的电压源端口, 构成图 4-11(a) 中的二端口网络  $N$ , 其伴随网络  $\hat{N}$  如图 4-11(b) 所示。

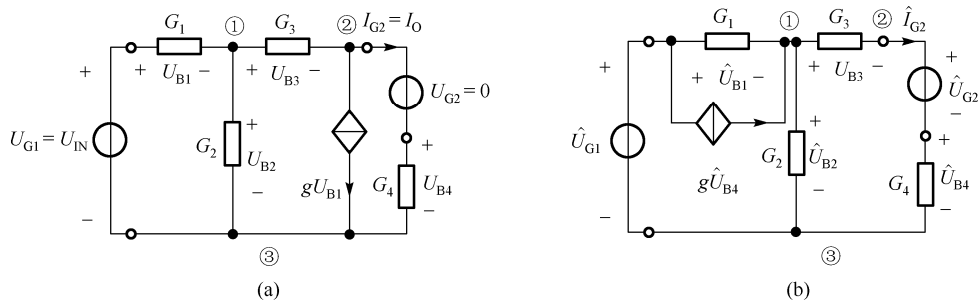


图 4-11 二端口网络  $N$  及其伴随网络  $\hat{N}$

转移函数为:

$$T = \frac{I_O}{U_{IN}} = -Y_{21}$$

式中,  $Y_{21}$  是矩阵  $\mathbf{Y}_{SC}$  的二行一列元素。负号是考虑到此处各端口支路电流、电压取一致参考方向。

令

$$U_{G1} = 1, \quad U_{G2} = 0$$

$$\hat{U}_{G1} = 0, \quad \hat{U}_{G2} = -1$$

则式 (4-127) 左端为:

$$\hat{\mathbf{U}}_G^T \Delta \mathbf{Y}_{SC} \dot{\mathbf{U}}_G = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Y_{11} & \Delta Y_{12} \\ \Delta Y_{21} & \Delta Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\Delta Y_{21} = \Delta T$$

网络  $N$  内部支路阻抗矩阵为:

$$\mathbf{y}_B = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 \\ g & 0 & 0 & G_4 \end{bmatrix}$$

令  $U_{G1} = 1V$ ,  $U_{G2} = 0$ , 可列出节点电压方程组:

$$\begin{cases} (G_1 + G_2 + G_3)U_1 - G_3U_2 = G_1U_{G1} \\ -G_3U_1 + (G_3 + G_4)U_2 = G_4U_{G2} - g(U_{G1} - U_1) \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} U_1 = -\frac{2}{3} \\ U_2 = -3 \end{cases}$$

则支路电压为

$$\mathbf{U}_B = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} & -3 \end{bmatrix}^T$$

令  $U_{G1} = 0$ ,  $U_{G2} = -1V$ , 可列出伴随网络的节点电压方程组:

$$\begin{cases} (G_1 + G_2 + G_3)\hat{U}_1 - G_3\hat{U}_2 = G_1\hat{U}_{G1} + g(\hat{U}_2 - \hat{U}_{G2}) \\ -G_3\hat{U}_1 + (G_3 + G_4)\hat{U}_2 = G_4\hat{U}_{G2} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

则支路电压为

$$\mathbf{U}_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}^T$$

代入式 (4-127) 右端得:

$$\hat{\mathbf{U}}_B^T \Delta \mathbf{y}_B \mathbf{U}_B = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta G_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta G_3 & 0 \\ \Delta g & 0 & 0 & \Delta G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

令  $\mathbf{y}_B$  各元素逐一分别产生无限小的改变, 可根据上式求出以下非归一化灵敏度:

$$\frac{\partial T}{\partial G_1} = \frac{5}{3} \times (-1) = -\frac{5}{3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial G_2} = -\frac{2}{3} \times 1 = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial g} = -3 \times -1 = 3$$

## 4.5 张 量 法

下面我们对张量矩阵的基本概念和分析方法做一些简单的介绍。

设有矩阵:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{m \times n}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rs} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{r \times s},$$

若  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  进行张量积定义为:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(m \times r) \times (n \times s)}$$

对矩阵  $\mathbf{A}$  进行行算子运算,

假设:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}, \mathbf{A}^{(3)}, \dots, \mathbf{A}^{(n)}], \quad \text{Vec}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(1)} \\ \mathbf{A}^{(2)} \\ \mathbf{A}^{(3)} \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{(n)} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(m \times n) \times 1}$$

$$\text{若 } \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \text{ 则 } \text{Vec}(\mathbf{B}') = \mathbf{B}'.$$

**定理:** 设有矩阵  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{n \times r}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{r \times s}$ , 则  $\text{Vec}(\mathbf{AXB}) = (\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{A})\text{Vec}(\mathbf{X})$ 。

**灵敏度:** 设  $y = f(x)$ , 则  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = \frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$ ,  $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x \approx$

$f'(x)\Delta x$ , 所以  $\frac{\Delta u}{\Delta y_i} = u'(y_i) = S_{y_i}^u$ 。其中,  $\alpha$  表示高阶无穷小量;  $u$  表示节点电压;  $y_i$  表示支路

导纳。

### 1. 支路导纳变化的节点电压灵敏度 ( $S_{y_i}^{\dot{U}_N}$ )

由  $\mathbf{Y}_N \dot{\mathbf{U}}_N = \dot{\mathbf{I}}_N$  可得:

$$\mathbf{A} \mathbf{Y}_B \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{U}}_N = \mathbf{A}(\dot{\mathbf{I}}_S - \mathbf{Y}_B \dot{\mathbf{U}}_S) \quad (4-128)$$

当支路导纳发生扰动  $\Delta \mathbf{Y}_B$  之后, 新的支路导纳为  $\mathbf{Y}_B + \Delta \mathbf{Y}_B$ , 其将引起节点电压  $\dot{\mathbf{U}}_N$  产生  $\Delta \dot{\mathbf{U}}_N$  的变化量。

$$\mathbf{Y}_B = \begin{bmatrix} y_1 & & 0 \\ & y_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & y_b \end{bmatrix} \quad \text{①}, \quad \Delta \mathbf{Y}_B = \begin{bmatrix} \Delta y_1 & & 0 \\ & \Delta y_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \Delta y_b \end{bmatrix} \quad \text{②}$$

将①、②代入式 (4-128) 中, 得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{Y}_B + \Delta \mathbf{Y}_B) \mathbf{A}^T (\dot{\mathbf{U}}_N + \Delta \dot{\mathbf{U}}_N) &= \mathbf{A}[\dot{\mathbf{I}}_S - (\mathbf{Y}_B + \Delta \mathbf{Y}_B) \dot{\mathbf{U}}_S] \\ (\mathbf{A} \mathbf{Y}_B \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \Delta \mathbf{Y}_B \mathbf{A}^T) (\dot{\mathbf{U}}_N + \Delta \dot{\mathbf{U}}_N) &= \mathbf{A}[\dot{\mathbf{I}}_S - \mathbf{Y}_B \dot{\mathbf{U}}_S] - \mathbf{A} \Delta \mathbf{Y}_B \dot{\mathbf{U}}_S \\ \mathbf{A} \mathbf{Y}_B \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{U}}_N + \mathbf{A} \Delta \mathbf{Y}_B \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{U}}_N + \mathbf{A} \mathbf{Y}_B \mathbf{A}^T \Delta \dot{\mathbf{U}}_N + \mathbf{A} \Delta \mathbf{Y}_B \mathbf{A}^T \Delta \dot{\mathbf{U}}_N &= \mathbf{A}[\dot{\mathbf{I}}_S - \mathbf{Y}_B \dot{\mathbf{U}}_S] - \mathbf{A} \Delta \mathbf{Y}_B \dot{\mathbf{U}}_S \end{aligned} \quad (4-129)$$

式 (4-129) 减去式 (4-128) 得:

$$\begin{aligned} A\Delta Y_B A^T \dot{\mathbf{U}}_N + A Y_B A^T \Delta \dot{\mathbf{U}}_N &= -A\Delta Y_B \dot{\mathbf{U}}_S \\ A Y_B A^T \Delta \dot{\mathbf{U}}_N &= -A\Delta Y_B (\dot{\mathbf{U}}_S + A^T \dot{\mathbf{U}}_N) \\ \Delta \dot{\mathbf{U}}_N &= -(A Y_B A^T)^{-1} A\Delta Y_B (A^T \dot{\mathbf{U}}_N + \dot{\mathbf{U}}_S) \end{aligned} \quad (4-130)$$

根据定理  $\text{Vec}(\mathbf{AXB}) = (\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{A})\text{Vec}(\mathbf{X})$ , 得:

$$\text{Vec}(\Delta \dot{\mathbf{U}}_N) = \text{Vec}[-(A Y_B A^T)^{-1} A\Delta Y_B (A^T \dot{\mathbf{U}}_N + \dot{\mathbf{U}}_S)] \quad (4-131)$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{U}}_N &= -[(A^T \dot{\mathbf{U}}_N + \dot{\mathbf{U}}_S)^T \otimes (A Y_B A^T)^{-1} A] \cdot \text{Vec}(\Delta Y_B) \\ &= -[(\dot{\mathbf{U}}_B + \dot{\mathbf{U}}_S)^T \otimes (A Y_B A^T)^{-1} A] \cdot \text{Vec}(\Delta Y_B) \end{aligned} \quad (4-132)$$

$$S_{y_i}^{\dot{\mathbf{U}}_N} = -[(\dot{\mathbf{U}}_B + \dot{\mathbf{U}}_S)^T \otimes (A Y_B A^T)^{-1} A]_{n \times (b \times b)} \quad (4-133)$$

即  $n$  个节点,  $b$  条支路的灵敏度为:

$$\text{Vec}(\Delta Y_B) \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 0 \\ \Delta y_2 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \vdots \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \Delta y_b \end{bmatrix}$$

## 2. 支路导纳变化的支路电压灵敏度 ( $S_{y_i}^{\dot{\mathbf{U}}_B}$ )

如果将式

$$\Delta \dot{\mathbf{U}}_N = -(A Y_B A^T)^{-1} A\Delta Y_B (A^T \dot{\mathbf{U}}_N + \dot{\mathbf{U}}_S)$$

代入支路电压增量矩阵中, 则得:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{U}}_B &= A^T \cdot (\Delta \dot{\mathbf{U}}_N) \\ \Delta \dot{\mathbf{U}}_B &= -A^T (A Y_B A^T)^{-1} A\Delta Y_B (A^T \dot{\mathbf{U}}_N + \dot{\mathbf{U}}_S) \end{aligned} \quad (4-134)$$

对  $\Delta \dot{\mathbf{U}}_B$  进行算子运算得:

$$\text{Vec}(\Delta \dot{\mathbf{U}}_B) = -(A^T \dot{\mathbf{U}}_N + \dot{\mathbf{U}}_S)^T \otimes [A^T (A Y_B A^T)^{-1} A] \cdot \text{Vec}(\Delta Y_B) \quad (4-135)$$



$$S_{y_i}^{\dot{U}_B} = -(\mathbf{A}^T \dot{\mathbf{U}}_N + \dot{\mathbf{U}}_S)^T \otimes [\mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{Y}_B \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}] \quad (4-136)$$

### 3. 支路阻抗变化的回路电流灵敏度 ( $S_{Z_B}^{\dot{I}_L}$ )

当  $\Delta \mathbf{Z}_B$  变化引起  $\Delta \dot{\mathbf{I}}_L$  变化时,  $\mathbf{B}(\mathbf{Z}_B + \Delta \mathbf{Z}_B) \mathbf{B}^T (\dot{\mathbf{I}}_L + \Delta \dot{\mathbf{I}}_L) = \mathbf{B}[\dot{\mathbf{U}}_S - (\mathbf{Z}_B + \Delta \mathbf{Z}_B) \dot{\mathbf{I}}_S]$  将变为:

$$\mathbf{B} \mathbf{Z}_B \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{I}}_L + \mathbf{B} \Delta \mathbf{Z}_B \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{I}}_L + \mathbf{B} \mathbf{Z}_B \mathbf{B}^T \Delta \dot{\mathbf{I}}_L + \mathbf{B} \Delta \mathbf{Z}_B \mathbf{B}^T \Delta \dot{\mathbf{I}}_L = \mathbf{B}(\dot{\mathbf{U}}_S - \mathbf{Z}_B \dot{\mathbf{I}}_S) - \mathbf{B} \Delta \mathbf{Z}_B \dot{\mathbf{I}}_S \quad (4-137)$$

$$\mathbf{B} \Delta \mathbf{Z}_B \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{I}}_L = \mathbf{B}(\dot{\mathbf{U}}_S - \mathbf{Z}_B \dot{\mathbf{I}}_S) \quad (4-138)$$

将式 (4-138) 减去式 (4-137) 得:

$$\mathbf{B} \mathbf{Z}_B \mathbf{B}^T \Delta \dot{\mathbf{I}}_L = -\mathbf{B} \Delta \mathbf{Z}_B (\dot{\mathbf{I}}_S + \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{I}}_L)$$

将上式整理得:

$$\Delta \dot{\mathbf{I}}_L = -(\mathbf{B} \mathbf{Z}_B \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B} \Delta \mathbf{Z}_B (\dot{\mathbf{I}}_S + \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{I}}_L) \quad (4-139)$$

利用张量矩阵定理, 得:

$$\Delta \dot{\mathbf{I}}_L = -[(\mathbf{B}^T \dot{\mathbf{I}}_L + \dot{\mathbf{I}}_S)^T \otimes (\mathbf{B} \mathbf{Z}_B \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B}] \cdot \text{Vec}(\Delta \mathbf{Z}_B) \quad (4-140)$$

$$S_{Z_B}^{\dot{I}_L} = -(\mathbf{B}^T \dot{\mathbf{I}}_L + \dot{\mathbf{I}}_S)^T \otimes [(\mathbf{B} \mathbf{Z}_B \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B}] \quad (4-141)$$

上式中,

$$\mathbf{B}^T \dot{\mathbf{I}}_L = \dot{\mathbf{I}}_B$$

$$\mathbf{Z}_B = \begin{bmatrix} Z_1 & & & 0 \\ & Z_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & Z_b \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{Z}_B = \begin{bmatrix} \Delta Z_1 & & & 0 \\ & \Delta Z_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Delta Z_b \end{bmatrix}$$

### 4. 支路阻抗变化的支路电流灵敏度 ( $S_{Z_B}^{\dot{I}_B}$ )

从上节可知, 由于支路阻抗变化引起回路电流的变化量为:

$$\Delta \dot{\mathbf{I}}_L = -(\mathbf{B} \mathbf{Z}_B \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B} \Delta \mathbf{Z}_B (\dot{\mathbf{I}}_S + \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{I}}_L) \quad (4-142)$$

由

$$\Delta \dot{\mathbf{I}}_B = \mathbf{B}^T \Delta \dot{\mathbf{I}}_L = -\mathbf{B}^T (\mathbf{B} \mathbf{Z}_B \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B} \Delta \mathbf{Z}_B (\dot{\mathbf{I}}_S + \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{I}}_L)$$

对  $\Delta \dot{\mathbf{I}}_B$  进行行算子运算, 得:

$$\Delta \dot{\mathbf{I}}_B = -(\mathbf{B}^T \dot{\mathbf{I}}_L + \dot{\mathbf{I}}_S)^T \otimes [\mathbf{B}^T (\mathbf{B} \mathbf{Z}_B \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B}] \cdot \text{Vec}(\Delta \mathbf{Z}_B) \quad (4-143)$$

$$S_{Z_B}^{\dot{I}_B} = -(\mathbf{B}^T \dot{\mathbf{I}}_L + \dot{\mathbf{I}}_S)^T \otimes [\mathbf{B}^T (\mathbf{B} \mathbf{Z}_B \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B}] \quad (4-144)$$

由图 4-12 可知:

$$\dot{U}_k = Z_k(i_k + i_{sk}) - \dot{U}_{sk} \quad (4-145)$$

根据上式得支路电压相量方程:

$$\dot{U}_B = Z_B(\dot{I}_B + \dot{I}_S) - \dot{U}_S \quad (4-146)$$

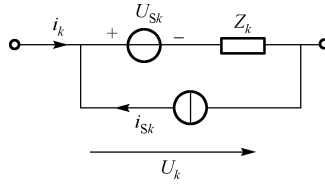


图 4-12 支路模型

式中

$$\dot{U}_B = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_k \\ \vdots \\ U_b \end{bmatrix}, \quad Z_B = \begin{bmatrix} Z_1 & & 0 \\ & Z_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & Z_b \end{bmatrix}, \quad \dot{I}_S = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_k \\ \vdots \\ I_b \end{bmatrix}, \quad \dot{U}_S = \begin{bmatrix} U_{s1} \\ U_{s2} \\ \vdots \\ U_{sk} \\ \vdots \\ U_{sb} \end{bmatrix}, \quad \dot{I}_B = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_k \\ \vdots \\ i_b \end{bmatrix}$$

当支路阻抗  $Z_B$  变化时,  $\Delta Z_B$  将引起支路电压变化  $\dot{U}_B + \Delta \dot{U}_B$ , 也将引起支路电流变化  $\dot{I}_B + \Delta \dot{I}_B$ 。

$$\begin{aligned} (\dot{U}_B + \Delta \dot{U}_B) &= (Z_B + \Delta Z_B)[(\dot{I}_B + \Delta \dot{I}_B) + \dot{I}_S] - \dot{U}_S \\ (\dot{U}_B + \Delta \dot{U}_B) &= (Z_B + \Delta Z_B)(\dot{I}_B + \Delta \dot{I}_B) + (Z_B + \Delta Z_B)\dot{I}_S - \dot{U}_S \\ &= Z_B \dot{I}_B + \Delta Z_B \dot{I}_B + Z_B \Delta \dot{I}_B + \Delta Z_B \dot{I}_B + Z_B \dot{I}_S + \Delta Z_B \dot{I}_S - \dot{U}_S \end{aligned} \quad (4-147)$$

将式 (4-147) 减去式 (4-146) 得:

$$\Delta \dot{U}_B = \Delta Z_B \dot{I}_B + Z_B \Delta \dot{I}_B + \Delta Z_B \dot{I}_S = \Delta Z_B(\dot{I}_B + \dot{I}_S) + Z_B \Delta \dot{I}_B \quad (4-148)$$

已知  $\Delta \dot{I}_B = B^T \Delta \dot{I}_L = -B^T (BZ_B B^T)^{-1} B \Delta Z_B (\dot{I}_S + \dot{I}_B)$ , 则将  $\Delta \dot{I}_B$  代入式 (4-148), 得:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{U}_B &= B^T \Delta \dot{I}_L = \Delta Z_B(\dot{I}_B + \dot{I}_S) - Z_B B^T (BZ_B B^T)^{-1} B \Delta Z_B (\dot{I}_S + \dot{I}_B) \\ &= [\dot{I} - Z_B B^T (BZ_B B^T)^{-1} B] \Delta Z_B (\dot{I}_S + \dot{I}_B) \end{aligned} \quad (4-149)$$

对  $\Delta \dot{U}_B$  的表达式进行 Vec 运算:

$$\text{Vec}(\dot{U}_B) = (\dot{I}_B + \dot{I}_S)^T \otimes [\dot{I} - Z_B B^T (BZ_B B^T)^{-1} B] \text{Vec}(\Delta Z_B) \quad (4-150)$$

即支路阻抗变化的支路电压灵敏度:

$$S_{Z_B}^{\dot{U}_B} = (\dot{I}_B + \dot{I}_S)^T \otimes [\dot{I} - Z_B B^T (BZ_B B^T)^{-1} B] \quad (4-151)$$

本章的主要内容是对几种电力网灵敏度分析进行一一介绍, 包括支路导纳变化的节点电压灵敏度、支路导纳变化的支路电压灵敏度、支路阻抗变化的回路电流灵敏度、支路阻抗变化的支路电流灵敏度和支路阻抗变化的支路电压灵敏度。

# 容差网络故障的区间分析 及可测点的选择

## 5.1 引言

目前, 在电网络分析中均假设电路中所有元件的参数值都是定值或是已知真值。然而, 在实际电路中元件的参数值都允许在某一范围内变动 (这就是元件参数的容差), 它具有随机性。近几年来, 无容差电路的故障诊断已经取得令人满意的理论成果。但是, 在实际故障诊断时, 当元件的参数值涉及到容差时, 就会遇到不少困难。这是因为, 在实际网络中元件参数值允许在一定范围内取值, 这就引起容差与电路故障之间难以区分, 造成容差电网络故障诊断出现模糊性, 可能出现误诊断或漏诊断。本章应用区间数学分析法, 对含有容差的网络提出了一系列识别子网络级电路故障和元件故障的理论和方法。

此外, 在子网络级电路故障可诊断定理和条件的基础上, 研究容差子网络级电路可测试点的优化选择, 提出了合理选择容差子网络级可测试点的方法、计算公式, 并分析了合理选择可测试点对故障诊断结果的影响, 它对容差电网络故障诊断具有实际应用价值。

## 5.2 含有容差网络的区间分析

众所周知, 网络中元件的容差一直是电网络故障诊断分析难以解决的问题。元件的容差主要来源于数据测量误差、计算误差等。所以人们一直在努力使计算结果保证在所要求的范围内。但是在实际工程中, 由于元件容差的存在, 造成计算结果与实际情况不相符。区间数学分析法为解决这一难题提供了一种有效的分析和计算方法。目前, 求解区间线性方程组的方法有<sup>[20]</sup>: 解析法、Hansen 区间迭代法和直接优化法等。然而, 解析法仅仅适用于处理区间变化范围较小的简单问题, 通过公式运算得到问题的解; Hansen 区间迭代法是目前求解区间线性方程组的另一种计算方法。由于 Hansen 迭代法初值选择的范围较宽, 所以会对迭代结果造成区间扩张和迭代次数增加等影响。因此, 正确选取区间迭代的初值, 提高区间计算的精度 (减少区间扩张) 和减少迭代次数是目前研究这一课题的热点之一。为此, 本文在 Hansen 区间迭代法的基础上进行改进。文中把改进的 Hansen 迭代法和 Markov 迭代法<sup>[24, 25]</sup> 分别应用于容差网络的电路故障诊断, 并对它们的计算结果进行分析比较。

假设  $N$  个独立节点的线性电路, 如果考虑元件的参数值存在容差时, 应用电网络理论形成电路节点电压区间方程组:

$$[Y][U_n] = [I_n] \quad (5-1)$$

式中,  $Y$  是电路的节点导纳区间系数矩阵, ( $Y$  中每个元素  $y_{ij}$ ,  $i, j=1, 2, \dots, n$ );  $I_n$  为区间向量, 是已知量;  $U_n$  ( $U_n$  中每个分量  $U_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ ) 是节点电压区间向量, 是未知量。如果区间系数矩阵  $Y$  是非奇异矩阵, 则式 (5-1) 方程组有解。下面分别介绍改进 Hansen 迭代法和 Markov 迭代法的计算步骤。

### 5.2.1 区间节点电压方程计算方法

#### 1. 改进 Hansen 区间迭代过程和步骤<sup>[24]</sup>

1) 首先选取结点电压方程式 (5-1) 中  $Y$  的每个元素的中值组成非奇异矩阵  $[G]$ :

$$[G] = \begin{bmatrix} m(y_{11}) & m(y_{12}) & \cdots & m(y_{1n}) \\ m(y_{21}) & m(y_{22}) & \cdots & m(y_{2n}) \\ \vdots & & & \vdots \\ m(y_{n1}) & m(y_{n2}) & \cdots & m(y_{nn}) \end{bmatrix}^{-1} \quad (5-2)$$

2) 构造区间矩阵  $[E]$ :

$$[E] = [I] - [G][Y] \quad (5-3)$$

3) 按下式计算  $[E]$  的范数:

$$\|E\| = \max_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n |E_{ij}| \right)$$

若  $[E]$  的范数  $\|E\| \geq 1$  时, 则调整  $[G]$  的元素值, 直至  $\|E\| < 1$  为止。

4) 其次按照下式选取式 (5-1) 中未知数  $[U_i]$  的初值  $U_i^{(0)}$  ( $i=1, 2, \dots$ ) 为:

$$U_i^{(0)} = [-1, 1] |GY|^{-1} |GI_n| \quad (5-4)$$

式中,  $|GY|$  和  $|GI_n|$  分别按下列算子计算:

$$\begin{aligned} |GY| &= \min \left( \left| (GY)_{ij}^L \right|, \left| (GY)_{ij}^R \right| \right) \\ |GI_n| &= \max \left( \left| (GI_n)_{ij}^L \right|, \left| (GI_n)_{ij}^R \right| \right) \end{aligned} \quad (5-5)$$

5) 最后应用 Hansen 迭代算子计算式 (5-1) 中的变量  $U$  的解:

$$[U^{(k+1)}] = \{ [G][I_n] + [E][U^{(k)}] \} \cap [U^{(k)}] \quad (5-6)$$

式中,  $k=0, 1, 2, \dots$ 。如果式 (5-6) 的交集为零, 则重新选择初始值  $[U^{(0)}]$ , 亦即重新选择非奇异矩阵  $[G]$ 。

当迭代满足

$$[U_i^{(k+1)}] = [U_i^{(k)}]$$

时, 则获得电路节点电压区间方程式的解。

## 2. Markov 区间方程迭代过程和步骤<sup>[25]</sup>

1) 首先根据节点电压方程式 (5-1) 中节点导纳矩阵  $\mathbf{Y}$  的元素构造  $\mathbf{T}$  和  $\mathbf{T}^{-1}$  的区间矩阵, 即:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{Y}) = (t_{ij}) = \begin{cases} y_{ij} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (5-7)$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{Y}) = (t_{ij}^*) = \begin{cases} (1/y_{ij})_- & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (5-8)$$

2) 然后, 应用 Markov 迭代算子求节点电压  $\mathbf{U}$  的区间值, 迭代过程为:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^{(k+1)} &= \mathbf{T}^{-1} * (\mathbf{I}_n - \mathbf{D}^{(\mathbf{Y}-\mathbf{D}^T)} * \mathbf{U}^{(k)}) \\ k &= 0, 1, 2, \dots; \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5-9)$$

上式中  $k = 0, 1, 2, \dots$ ; 且  $\mathbf{Y} - \mathbf{D}^T$  为:

$$\mathbf{Y} - \mathbf{D}^T = \mathbf{Y} - \mathbf{T}_- = \begin{cases} 0 & i = j \\ y_{ij} & i \neq j \end{cases}$$

若方程式 (5-1) 满足  $\|\mathbf{T}^{-1}\| \|\mathbf{Y} - \mathbf{D}^T\| \leq q < 1$ , ( $q$  是一个小于 1 的正数) 时, 则对于任意给定的初值  $\mathbf{U}_i^{(0)} (i=1, 2, \dots)$ , 式 (5-1) 都存在唯一解。

3) 当迭代满足

$$[\mathbf{U}_i^{(k+1)}] = [\mathbf{U}_i^{(k)}]$$

时, 则可获得区间节点电压方程式 (5-1) 的解。

### 5.2.2 故障仿真分析实例

本节将改进 Hansen 迭代法和 Markov 迭代法分别应用于求解含有容差电路的节点电压区间值, 并将两种方法的计算结果列表进行比较。

图 5-1 所示电路是一个具有 5 个独立节点, 12 条支路的线性网络 N。电路中各支路元件参数值见表 5-1。

表 5-1 各支路元件参数值 (单位: S)

支路号	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$y_7$	$y_8$	$y_9$	$y_{10}$	$y_{11}$	$y_{12}$
标称值	0.5	0.25	0.2	1	0.14	0.03	0.91	0.6	0.24	0.8	0.76	0.2

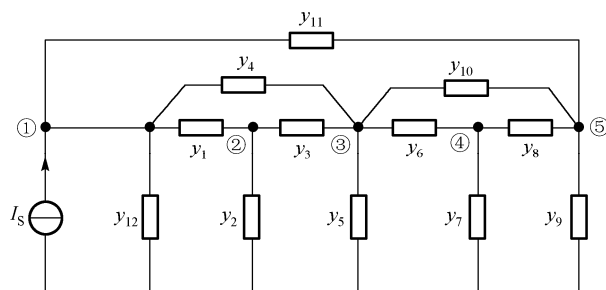


图 5-1 容差网络 N

如果不考虑元件参数值存在容差时, 应用节点电压分析法可算出网络中各节点电压的值, 见表 5-2。

表 5-2 无容差时各节点电压值 (单位: V)

	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_4$	$U_5$
节点电压值	0.1149	0.0789	0.0876	0.0302	0.0731

当考虑网络中各元件参数值存在容差 (各支路元件参数值容差以  $\pm 5\%$  变化) 时, 应用改进 Hansen 迭代法和 Markov 迭代法的计算结果见表 5-3。

表 5-3 容差网络各节点电压区间值 (单位: V)

	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_4$	$U_5$
改进 Hansen 迭代法	-0.0735 0.3033	-0.0833 0.2411	-0.1027 0.2779	-0.0483 0.1087	-0.0923 0.2386
Markov 区间迭代法	0.1123 0.1186	0.0778 0.0804	0.0868 0.0888	0.0300 0.0305	0.0726 0.0740

为了便于比较, 现以表 5-2 和表 5-3 中电压  $U_3$  的解 (改进 Hansen 迭代和 Markov 迭代的计算结果) 为例, 将它的点值和区间值的大小都标在同一数轴上, 如图 5-2 所示。

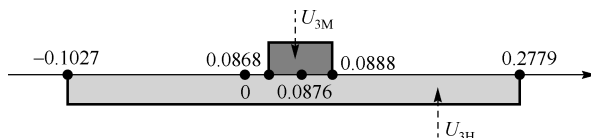


图 5-2 电压区间值

从图 5-2 分析可见, 应用 Markov 区间迭代的计算结果的区间宽度比改进 Hansen 迭代的计算结果小 [ $\omega(x_{2M}) < \omega(x_{2H})$ ], 且接近于无容差的点值。由此可见, 应用 Markov 迭代法计算结果的精度较高。它更适合于容差网络的故障分析和诊断。

### 5.3 容差网络故障的区间判定

假设线性容差网络 N 有  $n$  个独立节点,  $b$  条支路。其节点电压方程为:

$$[Y_{n0}][U_n] = [I_n] \quad (5-10)$$

判别网络 N 是否有故障, 在理论上通常是采用可测端点的测量值与无故障时的正常值的偏差量来识别的。在无容差情况下, 如果选择可测点满足故障可诊断条件时, 这种判别方法是可靠且有效的。然而, 当计及元件参数存在容差时, 这种识别方法已经不再适用了。因为元件参数值存在容差会使得可测点的测量值在一定范围内变化, 它不是一个点值, 它随机落在一个区间值的范围内。因此判别容差网络是否有故障, 关键是怎样来确定可测点的正常区间值。

当网络元件参数值存在容差时, 式 (5-10) 是一个区间矩阵方程。即:

$$[\bar{Y}_{n0}][U_n] = [I_n] \quad (5-11)$$

式中,  $\bar{Y}_{n0}$  由两个分量构成: 一是无容差网络的节点导纳矩阵; 二是容差引起的最大容限导纳矩阵, 它们都是已知量。由式 (5-11) 可求出容差网络无故障时的节点电压  $U_{ni}$  ( $i = 1, 2, \dots$ )

的函数式<sup>[26]</sup>为:

$$U_{mi} = f(\phi_0 + \Delta\phi_0, I_n) \quad (5-12)$$

式中,  $\phi_0$  是网络元件标称值的导纳矩阵函数, 是已知量。  $\Delta\phi_0$  是由容差引起的最大值的函数。

**定义1** 网络中的节点满足下列条件者可选作为可测试点: ①可用于测试的端点; ②网络节点电压对参数变化的灵敏度不为零。

**定义2**  $U_m^{(0)}$  表示网络中无故障时可测试点的电压计算值;  $U_m$  表示网络中有故障时可测试点的电压测量值。

#### 容差网络诊断判据:

容差网络故障的必要且充分条件是: 网络中的可测试点电压测量值与无故障时的计算值的交集为空集, 即  $U_{mi} \cap U_{mi}^{(0)} = 0 \quad (i=1, 2, \dots)$ :

$$\theta = \bigcup_{i=1}^g (U_{mi} \cap U_{mi}^{(0)}) = 0 \quad (5-13)$$

式中,  $g$  表示容差网络中可测试端点的总个数。

#### 证明: 必要性:

由式 (5-12) 解出可测试点电压计算值  $U_{mi}^{(0)} \quad (i=1, 2, \dots)$  的关系函数式为:

$$U_{mi}^{(0)} = \xi(\phi_0 + \Delta\phi_0, I_n) \quad (5-14)$$

由于元件参数存在容差, 引起  $U_{mi}^{(0)}$  的值在容差范围内变化, 所以它不是点值, 而是一个区间值。它可以通过计算获得。

当容差网络发生故障时, 在同一测试点上外加相同的电流源激励, 可测试点的电压测量值  $U_{mi}$  的关系函数式为:

$$U_{mi} = \xi(\phi_0, I_n) \quad (5-15)$$

式中,  $\phi$  表示网络元件参数构成的导纳矩阵关系函数。它除了考虑容差因素之外还包含有故障因数。现在分析下列两种情况:

① 如果元件参数变化值不超出最大容差范围, 亦即  $\phi \in \phi_0 + \Delta\phi_0$ , 则可测试点的电压测量值不会超出无故障时的电压区间值 ( $U_{mi} \in U_{mi}^{(0)}$ ), 它们的交集不为空集。即:

$$U_{mi} \cap U_{mi}^{(0)} \neq 0$$

② 如果元件参数变化值超出容差范围, 即  $\phi \notin \phi_0 + \Delta\phi_0$ 。由式 (5-14) 和式 (5-15) 两式比较, 则有  $U_{mi} \notin U_{mi}^{(0)}$ , 它们的交集为空集, 有:

$$U_{mi} \cap U_{mi}^{(0)} = 0$$

则容差网络有故障。必要性得到证明。

#### 充分性:

根据网络可测试点的基本条件, 网络内部元件参数发生变化时, 在可测端点上的电压变化量不会相互抵消。如果可测端点的电压测量值没有超出正常电压区间值, 即满足  $U_{mi} \in U_{mi}^{(0)}$ 。通过式 (5-14) 和式 (5-15) 比较可得:  $\phi \in \phi_0 + \Delta\phi$ , 即元件参数变化值不会超出它们允许的容差范围, 所以容差网络无故障。充分性证明完毕。

如图 5-3 所示容差网络有 7 个独立节点, 16 条支路。在节点③和参考节点之间外加 0.2A 的电流源激励。网络元件参数值的容差按 $\pm 5\%$ 变化。现在应用 5.2 中介绍的 Markov 区间迭代法, 分别计算图 5-3 容差网络在无故障情况下可测试点(假设网络中所有节点均为可测试点)的电压计算值  $U_{mi}^{(0)}$  ( $i=1, 2, \dots, 7$ ) 和故障时可测试点的电压区间值。各支路的参数标称值见表 5-4。

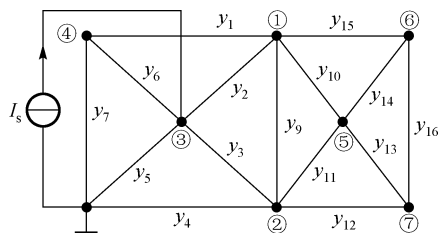


图 5-3 网络连接图 N

表 5-4 各支路元件参数标称值 (单位: S)

支路号	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$y_7$	$y_8$
标称值	0.4	0.7	0.5	0.9	0.45	0.2	0.8	0
支路号	$y_9$	$y_{10}$	$y_{11}$	$y_{12}$	$y_{13}$	$y_{14}$	$y_{15}$	$y_{16}$
标称值	0.12	0.36	0.75	0.8	0.10	0.6	0.55	0.75

1) 容差网络无故障时, 用 Markov 区间迭代法可算出各节点电压的区间值见表 5-5。

表 5-5 无故障时的电压区间值 (单位: V)

	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_4$	$U_5$	$U_6$	$U_7$
电压区间值	0.1103992 0.1220202	0.0715494 0.0841712	0.1713719 0.1894110	0.0560243 0.0619216	0.0892511 0.0986460	0.0936570 0.1035156	0.0849041 0.0938414

2) 容差网络发生故障时, 假设网络中  $y_4$  和  $y_6$  的参数值分别在下列两种情况下发生变化:

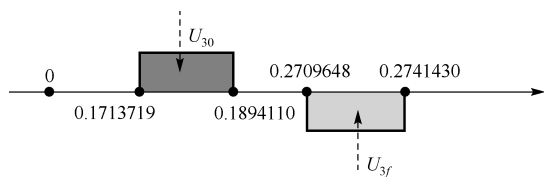
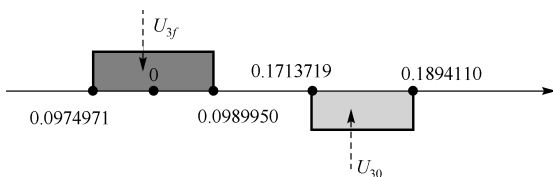
- ①  $y_4$  从 0.9S 变为 0.09S;  $y_6$  从 0.2S 变为 0.02S。
- ②  $y_4$  从 0.9S 变为 19S;  $y_6$  从 0.2S 变为 12S。

现在用 Markov 区间迭代法分别算出上述两种情况下可测端点上的电压值读数范围, 见表 5-6 (假设所有节点都是可测点)。由表 5-5 和表 5-6 可见: 当网络发生故障时, 可测试点的电压值与无故障的电压区间值的交集都为空集。

表 5-6 故障时可测点的电压区间值 (单位: V)

		$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_4$	$U_5$	$U_6$	$U_7$
故障电压值	情况①	0.2069550	0.2189812	0.2709648	0.0719751	0.2135196	0.2123266	0.2151314
		0.2058168	0.2179477	0.2741430	0.0722961	0.2141706	0.2122555	0.2156253
	情况②	0.0632008	0.0043768	0.0974971	0.0919027	0.0267901	0.0343321	0.0193680
		0.0629396	0.0043419	0.0989950	0.0905488	0.0268348	0.0344003	0.0193513

为了直观起见, 现将  $U_3$  在上述两种故障情况下的电压区间值和无故障的电压值分别在一数轴表示, 它们的交集都为空集, 如图 5-4 和图 5-5 所示。

图 5-4  $U_3$  在情况①下的区间值图 5-5  $U_3$  在情况②下的区间值



## 5.4 容差子网络级故障区间诊断

### 5.4.1 线性容差子网络级故障区间诊断

设图 5-6 是线性非互易网络  $N$ 。应用节点撕裂法, 在第  $i$  次交叉撕裂时, 将网络  $N$  撕裂成  $N_i^l$  和  $\hat{N}_i^l$  两个子网络。现将子网络  $N_i^l$  单独示出, 见图 5-6。

如果  $N_i^l$  与其他的子网络不存在耦合时, 其节点电压方程<sup>[21, 22]</sup>为:

$$[Y_{ln}][U_{ln}] = [I_m] + \begin{bmatrix} I_{ts} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5-16)$$

式中,  $[Y_{ln}]$  为  $N_i^l$  的节点导纳矩阵;  $[U_{ln}] = [U_{TT} \ U_{MT} \ U_{GM} \ U_{II}]^T$ ;

$[I_m] = [\mathbf{0} \ I_{MT} \ I_{GM} \ \mathbf{0}]^T$ ;  $[I_{ts}] = [I_{TT} \ I_{SM}]^T$ 。  $U_{TT}$ ,  $U_{MT}$ ,  $U_{GM}$  和  $U_{II}$  分别表示  $N_i^l$  中被撕裂的不可测节点电压, 它是未知量; 被撕裂的可测节点电压, 它是已知量; 未被撕裂节点电压, 它是已知量和内部节点电压, 它是未知量。  $m$  表示  $N_i^l$  的可测点数。如果把可及节点的测量值  $[U_{MT}]$ ,  $[U_{GM}]$ ,  $[I_{MT}]$  和  $[I_{GM}]$  代入式 (5-16), 经过移项整理后可得下列方程式:

$$\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_m \\ U_i \end{bmatrix} = [I_m] + \begin{bmatrix} I_{ts} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5-17)$$

式中,  $[U_m] = [U_{MT} \ U_{GM}]^T$  是已知量;  $[U_i] = [U_{TT} \ U_{II}]^T$  是未知量。当  $N_i^l$  中选择的可及节点满足  $m \geq m_2$  和可诊断拓扑条件时, 可将式 (5-17) 分成下列两个式子。即:

$$[Y_1][U_m] + [Y_2][U_i] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ I_{MT} \end{bmatrix} + [I_{ts}] \quad (5-18)$$

$$[Y_3][U_m] + [Y_4][U_i] = \begin{bmatrix} I_{GM} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5-19)$$

若不考虑网络元件参数值存在容差时, 式 (5-18) 和式 (5-19) 都是点值方程。首先由式 (5-19) 求出  $[U_i]$  的值, 然后再代入式 (5-18) 即可算出撕裂端点的电流  $[I_{ts}]$  值。判断子网络  $N_i^l$  有无故障的依据是应用 KCL 对  $[I_{ts}]$  中的各元素取和来判断。若其和不为零, 则  $N_i^l$  有故障, 反之为无故障。即:

$$\sum_{j=1}^{m_2} I_{ts_j} = 0 \quad (5-20)$$

然而, 当考虑网络参数值存在容差时, 以上方程均为区间线性方程。因此, 即使网络无故障, 在撕裂端口处的电流之和即式 (5-20) 也不为零, 它存在一个区间量。因此, 我们定义这个区间量的最大值为零电流门限  $D_0$ 。下面我们应用 5.2 节介绍的区间分析法来确定容差子网络无故障时的零门限  $D_0$  的区间值。

由于网络参数值存在容差, 所以式 (5-18) 和式 (5-19) 都是区间矩阵方程。应用区间迭代法, 将无故障时的  $[U_m]$ 、 $[I_m]$  和  $[I_{GM}]$  代入式 (5-19) 求出电压  $[U_i]$  的区间值, 然后将  $[U_i]$

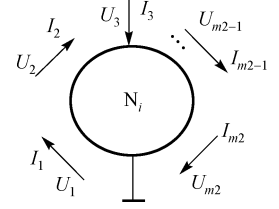


图 5-6 子网络级电路  $N_i$

的区间值代入式 (5-18), 即可算出无故障时撕裂端点的等效电流  $[I_{ts}]$  的区间值, 亦即可求出零电流门限  $D_0$  的区间值。即:

$$D_0 = \sum_{j=1}^{m_s} I_{ts_j} \quad (5-21)$$

判断容差子网络  $N_i^f$  是否有故障, 是将故障时可及点的电压、电流测量值代入式 (5-18) 和式 (5-19) 中, 然后按上述迭代步骤, 即可算出  $N_i^f$  撕裂端口  $[I_{ts}]$  的区间值。当它的元素区间之和  $D_f$  的值与零门限  $D_0$  的交集为空集时, 即:

$$D_f \cap D_0 = 0 \quad (5-22)$$

则可判断出子网络  $N_i^f$  有故障, 令逻辑诊断值  $H(N_i^f)$  为 1; 反之无故障, 令逻辑诊断值  $H(N_i^f)$  为 0。用同样的诊断方法也可以判断子网络  $\hat{N}_i^f$  是否有故障, 也可以确定它的逻辑诊断值 (这里不再重述)。

#### 5.4.2 非线性容差子网络级故障区间诊断

设非线性网络  $N$  有  $n$  个独立节点,  $b$  条支路。应用节点撕裂概念, 在第  $i$  次撕裂时将网络  $N$  撕裂成两个互不耦合的子网络  $N_i^f$  和  $\hat{N}_i^f$ , 如图 5-7 所示。如果要判断子网络  $N_i^f$  是否有故障, 首先是根据子网络  $N_i^f$  的性质和要求, 在子网络  $N_i^f$  的撕裂端点处 (与  $\hat{N}_i^f$  相关联的节点处), 适当地加上电流源激励, 如图 5-8 所示。然后在子网络  $N_i^f$  中的可测端点上测量其电压值, 然后再根据下列判据判断  $N_i^f$  是否发生故障。

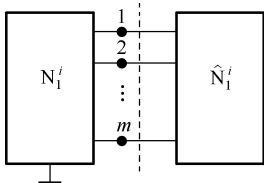


图 5-7 网络  $N$

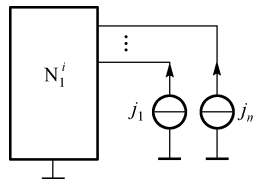


图 5-8 子网络  $N_i^f$

**定义 1** 网络  $N_i^f$  中的节点满足下列条件时可作为可测试端点:

- (1) 在子网络电路  $N_i^f$  的撕裂端点加上电流源激励,  $N_i^f$  中可以用于测量电压的节点;
- (2) 这些节点对于子网络电路  $N_i^f$  中所有元件参数的灵敏度均不为零且任意两个独立故障同时发生时, 在这一节点上不会互相抵消。

**判据 1** 无容差子网络电路  $N_i^f$  (或  $\hat{N}_i^f$ ) 无故障的充分和必要条件是可测试端点的电压测量值等于无故障时的电压计算值。即

$$U_{mi} = U_{mi}^{(0)} \quad (i=1, 2, \dots)$$

式中,  $U_{mi}$  表示在子网络电路  $N_i^f$  的撕裂端点处加上电流源激励, 当网络内部元件参数发生变化时, 在第  $i$  个可测试端点上的电压测量值;  $U_{mi}^{(0)}$  表示子网络  $N_i^f$  无故障时, 在  $N_i^f$  的撕裂端点加上与故障测量时相同的电流源激励, 在第  $i$  个可测试端点的电压计算值。如果考虑电网络  $N$  中元件参数存在容差时, 无故障时的电压计算值  $U_{mi}^{(0)}$  不是点值, 它是一个区间值。因此, 要判断容差子网络  $N_i^f$  是否发生故障应采用下列判据。

**判据 2** 容差子网络  $N_1^i$  (或  $\hat{N}_1^i$ ) 故障的充分和必要条件是测试端点的电压测量值与无故障时的电压计算值的交集为空集, 即:

$$U_{mi} \cap U_{mi}^{(0)} = 0 \quad (i=1, 2, \dots)$$

**证明:** 必要性和充分性

假设子网络  $N_1^i$  无故障时, 可测试端点的电压  $U_{mi}^{(0)}$  的计算值的函数表达式为:

$$U_{mi}^{(0)} = F(h_0 + \Delta h^{(0)}, I_m^{(0)}) \quad (5-23)$$

式 (5-23) 中,  $h_0$  表示子网络  $N_1^i$  中元件参数标称值的关系函数,  $\Delta h_0$  表示由网络元件参数容差引起的最大容限的关系函数, 它们都是已知量;  $I_m^{(0)}$  表示在子网络  $N_1^i$  的撕裂端点处外加电流源激励, 它是一个已知量。考虑元件参数存在容差时, 式 (5-23) 中的  $U_{mi}^{(0)}$  不是点值, 而是区间值, 它可以在测试前通过计算获得。

如果要判断容差子网络  $N_1^i$  是否有故障, 可在它的撕裂端点处加上与无故障时相同的电流源激励, 在可测试端点的电压测量值  $U_{mi}$  的函数表达式为:

$$U_{mi} = F(h, I_m^{(0)}) \quad (5-24)$$

式 (5-24) 中  $h$  表示子网络电路  $N_1^i$  中元件参数当前变化值的关系函数, 它是一个未确定量。式中测试端点的电压测量值  $U_{mi}$  是点值, 它可以通过测量获得。如果子网络电路  $N_1^i$  中元件参数变化量均不超出最大的容差范围时, 即  $h \in h_0 + \Delta h$ , 则子网络电路  $N_1^i$  仍然是无故障, 可测试端点的电压测量值  $U_{mi}$  决不会超出无故障时的电压区间值, 即  $U_{mi} \subseteq U_{mi}^{(0)}$  (亦即  $U_{mi} \cap U_{mi}^{(0)} \neq 0$ ); 若子网络电路  $N_1^i$  有故障, 网络中的元件参数值超出正常容差范围, 即  $h > h_0 + \Delta h$ 。由式 (5-23) 和式 (5-24) 比较可知, 可测试端点的电压测量值一定不等于无故障时的电压计算值, 它必定超出正常电压区间值, 亦即  $U_{mi} \cap U_{mi}^{(0)} = 0$ , 则必要性得到证明。

根据可测端点的基本要求, 网络中任意两个元件同时发生故障时, 在可测端点上的电压变化量不会互相抵消。如果可测端点的电压测量值没有超出正常电压区间值时, 即  $U_{mi} \subseteq U_{mi}^{(0)}$ , 那么由式 (5-23) 和式 (5-24) 比较可见, 电网络中的元件参数变化不可能超出允许的容差范围, 即  $h \in h_0 + \Delta h$ , 亦即子网络电路  $N_1^i$  无故障, 则充分性得到证明。

### 1. 非线性容差子网络可测点电压区间值的确定

将 Krawczyk-Hansen 区间迭代法<sup>[24, 28]</sup>应用于求解非线性容差电网络可测点电压值。假设非线性容差电网络  $N$  如图 5-7 所示。根据 KCL 和 KVL 可得非线性容差电网络方程式:

$$Q(\zeta; X) = 0 \quad (5-25)$$

式 (5-25) 中的  $Q = Q(\zeta; X)$  是一个区间方程组;  $\zeta = (\zeta_i) \in R^n$ , 它表示容差网络元件参数的标量函数, 它的取值可以在给定的容差范围变动, 是已知量;  $X = (x_i) \in R^n$ , 它是网络  $N$  中的电压或电流相量, 是式 (5-25) 中待求的未知量, 它的每一个分量不是点值, 也是一个区间值。求解式 (5-25) 方程组的未知量可按下列迭代步骤进行<sup>[27-30]</sup>:

1) 首先构造方程组 (5-25) 式的 Jacobi 矩阵  $J(\zeta, X)$ :

$$J(\zeta, X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial q_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial q_2}{\partial x_1} & \frac{\partial q_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial q_n}{\partial x_n} \\ & & \ddots & \\ \frac{\partial q_n}{\partial x_1} & \frac{\partial q_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial q_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

(5-26)

2) 令  $Y^{(k)} = m(X^{(k)})$ , 式中  $m(X^{(k)})$  表示第  $k$  次迭代时,  $X$  的中值。即  $y_i = \frac{1}{2}(x'_i + x''_i)$  式中  $x'_i, x''_i$  分别表示第  $i$  个未知量  $x_i$  的上区间和下区间值 ( $i=1, 2, \dots, n; k=0, 1, 2, \dots$ )。然后将  $Y^{(k)}$  代入式 (5-26) 中求解  $\bar{Y}^{(k)} = [J(Y^{(k)})]^{-1}$  的值。

3) 用 Krawczyk-Hansen 的迭代算子求解方程组式 (5-25) 中的变量  $X$ :

$$K^{(k)} = Y^{(k)} - \bar{Y}^{(k)} \cdot Q(Y^{(k)}) + \bar{Y}^{(k)} \cdot \{ [m(J(X^{(k)}))] - J(X^{(k)}) \} \cdot (X^{(k)} - Y^{(k)})$$
$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} \cap k_i^{(k)}$$
$$i=1, 2, \dots, n; \quad k=0, 1, 2, \dots$$

(5-27)

在正常情况下, 式 (5-27) 是区间套序列<sup>[24]</sup>。当迭代满足  $[X^{(k+1)}] = [X^{(k)}]$  时, 则获得非线性方程组式 (5-25) 的解, 亦即获得非线性容差电网可测端点的电压区间值。

2. 非线性容差子网络故障诊断示例

如图 5-9 所示容差电路, 表示在第  $i$  次被撕裂时的非线性子网络电路  $N_i^f$ 。子网络电路中各元件参数的标称值见表 5-7。其中非线性元件  $R_p$  的伏安特性关系为:  $i = 3u_3^2$ 。网络中各元件参数的变动按  $\pm 5\%$  容差变化。如果在撕裂端点 a-b 处外加电流源激励  $j_1=0.1A$ 。若在网络中选择节点①、②作为可测量端点, 根据公式 (5-26) 和式 (5-27) 可算出非线性容差子网络电路无故障时可测量端点的电压区间值。计算结果见表 5-8。

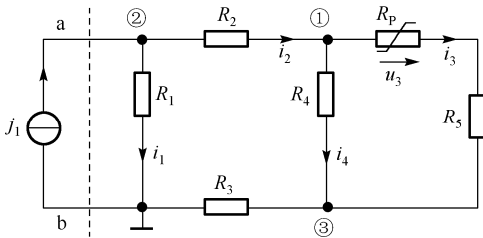


图 5-9 非线性子网络电路

表 5-7 各支路元件参数值 (单位: Ω)

支路元件	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$
元件参数	100	50	20	150	200

表 5-8 无故障时可测端点电压区间值 (单位: V)

可测点	$U_1$		$U_2$	
电压值	16.660	52.5983	58.1042	91.8011

故障仿真：假设子网络电路  $N_i^l$  中的元件  $R_4$  发生故障 ( $R_4$  从  $150\Omega$  变化为  $850\Omega$ )，其余元件参数均不变。判断子网络电路  $N_i^l$  是否发生故障，首先是在撕裂端口 a-b 处外加与无故障计算时相同的电流源激励。然后，在可测端点上测量电压值。测量结果见表 5-9。

表 5-9 可测端点的电压测量值 (单位: V)

可测点	$U_1$	$U_2$
电压值	74.97	173.32

通过表 5-8 和表 5-9 比较可见，可测端点的电压测量值均超出无故障时的电压区间值。则它们的交集都为空集，即： $U_{mi} \cap U_{mi}^{(0)} = 0$  ( $i = 1, 2, \dots$ )。所以根据判据 2，则可判断出容差子网络  $N_i^l$  是有故障的，这与原来的假定是相吻合的。为了方便起见，现将无故障时的电压区间值  $U_{10}$  和  $U_{20}$  以及故障时的电压测量值  $U_{f1}$  和  $U_{f2}$  的值标在同一数轴上，如图 5-10 所示。由图可见：它们的交集都为空集，则可判断出容差子网络电路  $N_i^l$  发生故障。

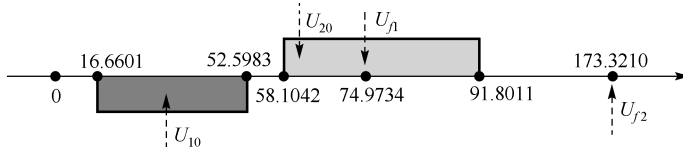


图 5-10 电压区间值

以上故障诊断仿真表明，文中提出的非线性容差子网络级故障诊断的判据是正确有效的，它对实际工程网络的故障诊断具有一定的应用价值。

## 5.5 容差网络可测点电压灵敏度与故障识别关系

线性非互易网络的节点电压灵敏度，对网络内部元件参数是否处于故障状态起着至关重要的报警作用。通常判断网络是否发生故障，主要是依靠在可测试点上获得的测量信息来加以识别的。当网络内部元件发生故障时，我们希望在这些可测试点上都能测量得到正确而强烈的故障信号，它对容差网络的故障诊断是极为重要的。因此，将节点电压对支路参数灵敏度作为合理选择可测点的基本条件之一。

设线性非互易网络  $N$ ，有  $n$  个独立节点， $b$  条支路。其节点电压方程为：

$$[Y_n][U_n] = [I_n] \quad (5-28)$$

式中， $Y_n$  是电路的节点导纳区间系数矩阵； $I_n$  为区间电流向量，是已知量； $U_n$  是节点电压区间向量，是未知量。当电路参数发生扰动时，由式 (5-28) 可得节点电压对元件参数变化的灵敏度  $S_p^{U_{ni}}$  [31]：

$$S_p^{U_{ni}} = -(U_s + A^T U_n)^T \otimes \{-(Y_n)^{-1} A^T\} \quad (5-29)$$

亦即，第  $i$  个节点对第  $j$  个元件参数的电压灵敏度  $S_{p_j}^{U_{ni}}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 为：

$$S_{p_j}^{U_{ni}} = -\text{Vec}\{(U_s + A^T U_n)^T \otimes \{-(Y_n)^{-1} A^T\}\}_i \quad (5-30)$$

式中， $\otimes$  表示矩阵张量积运算符； $U_s$  和  $A$  分别表示支路电压源向量和电路的关联矩阵，它们都是已知量。

当不考虑元件参数值和外加信号源存在容差时,  $S_{P_j}^{U_{m_i}}$  是点值。显然, 它的值越大, 对该元件参数值的变化越敏感。但是当计及元件参数值存在容差时,  $S_{P_j}^{U_{m_i}}$  不是点值, 它是一个区间值。应用区间数学分析法可以求出节点电压灵敏度  $S_{P_j}^{U_{m_i}}$  的区间值。从易于察觉网络故障的角度来看, 节点电压灵敏度区间值的宽度越大, 则说明该节点对元件参数的变化越敏感, 越有利于提高网络故障的识别能力。因此, 我们把节点电压灵敏度区间中值  $m(S_{P_j}^{U_{m_i}})$  和它的区间宽度  $\omega(S_{P_j}^{U_{m_i}})$  的乘积, 作为选择电网可测点的一个重要参数。

## 5.6 撕裂端口零电流门限灵敏度与故障识别关系

应用节点撕裂法概念, 将网络  $N$  撕裂成  $N_1$  和  $N_2$  两部分。现将子网络  $N_1$  单独分开, 见图 5-11。当  $N_1$  和  $N_2$  无耦合时,  $N_1$  子网络电路的节点电压方程:

$$\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_m \\ U_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{MT} \\ I_{GM} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{ts} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-31)$$

当网络无故障且又不考虑容差时,  $[I_{ts}]$  中各个分量之和为零, 即:

$$\sum_{j=1}^{m_2} I_{ts_j} = 0$$

但是, 当考虑元件参数和激励都存在容差时, 即使电路无故障, 上式也不为零, 它存在一个区间值。我们定义这个区间值的最大限度为子网络级电路  $N_1$  撕裂端口的零电流门限  $D_0$ , 即:

$$D_0 = \sum_{j=1}^{m_2} I_{ts_j} \quad (5-32)$$

显然, 要准确地判断  $N_1$  是否有故障, 关键是零电流门限  $D_0$  的区间宽度  $\omega(D_0)$  小些为好。另外, 从元件参数值发生扰动时易于被察觉的角度看, 则要求零电流门限  $D_0$  的灵敏度  $S_{P_j}^{D_0}$  的值尽量大些。然而,  $S_{P_j}^{D_0}$  的大小与所选择的可测点的位置有关。当可测点选择不适合时, 将会引起  $S_{P_j}^{D_0}$  的值变小, 亦即使  $D_0$  的区间宽度  $\omega(D_0)$  增大, 使得在撕裂端口所获得的故障信息被参数容差引起的零门限所覆盖, 则造成故障误诊断或漏诊断。因此, 我们把零门限  $D_0$  的灵敏度的中值  $m(S_{P_j}^{D_0})$  作为选择可测点的另外一个重要参数。

根据泰勒级数可以证明, 当  $N_1$  中任一元件参数  $P_j$  发生变扰动时, 由式 (5-31) 可得:

$$\Delta D_0 = \sum_{i=1}^{m_2} \left\{ \text{Vec} \left( \begin{bmatrix} Y_m \end{bmatrix} \frac{\partial [U_m]}{\partial P_j} - \frac{\partial [I_R]}{\partial P_j} \right) \right\} \Delta P_j$$

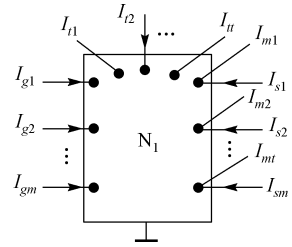


图 5-11 子网络电路

式中

$$[Y_m] = [Y_1] - [Y_2][Y_4]^{-1}[Y_3]; [I_R] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ I_{MT} \end{bmatrix} - [Y_2][Y_4]^{-1} \begin{bmatrix} I_{GM} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

为此, 可获得撕裂端口的零电流门限  $D_0$  对第  $j$  个元件  $P_j$  的灵敏度  $y_{10}$  值为:

$$S_{P_j}^{D_0} = \sum_{i=1}^{m_2} \left\{ \text{Vec} \left( [Y_m] \frac{\partial [U_m]}{\partial P_j} - \frac{\partial [I_R]}{\partial P_j} \right) \right\}_i \quad (5-33)$$

式中,  $y_{10}$  不是点值, 它是一个区间值。  $y_{10}$  的值越大, 越有利于故障的识别。

## 5.7 容差子网络级可测点的优化选择

现在研究如何从子网络  $N_1$  中选择出能强烈反映网络内部元件参数值发生变化时的可测点。也就是说, 当子网络  $N_1$  发生故障时, 通过在这些节点上所获得的测量信息, 就可以准确、可靠地反映网络内部元件参数值是否发生变化。

**定义 1** 在子网络  $N_1$  中, 满足故障可诊断拓扑条件的可测点的集合称为待选可测点基集合。假设每一组待选可测点集合由  $m_2$  个节点组成 ( $m_2$  是子网络  $N_1$  中被撕裂的节点数;  $m_2 = m$ ,  $m$  是子网络  $N_1$  中的可测点数)。

**定义 2** 子网络  $N_1$  内部可能发生故障的元件集合称为故障基集合。

现在假设子网络  $N_1$  中可测点基集合有  $S$  组待选可测点,  $N_1$  中故障基集合有  $bf$  个元件。下面我们研究如何从  $S$  组待选可测点基集合中优化选取一组较为理想的可测点 (亦即当容差网络  $N$  发生故障时, 可以借助这组可测点的测量值能有效地判断出  $N_1$  是否有故障)。这就是本节要解决的问题。

首先应用区间数学分析法算出容差网络  $N$  无故障时, 每一组待选可测点电压对故障基集合中每一个元件参数值变化的灵敏度区间值  $S_{P_j}^{U_{m_i}}$  (亦即按照式 (5-30) 计算)。由于不同支路参数值发生变化时, 在同一个节点上产生的电压灵敏度可能会相互抵消, 因此, 在计算每一组待选可测点的电压对故障基集合中所有元件参数值变化的灵敏度大小时, 则对它们的区间宽度和中值进行求和、连乘运算。亦即按照式 (5-34) 计算每一组待选可测点的电压灵敏度的均值  $SD^i (i=1, 2, 3, \dots, S)$ 。由此可见, 在待选可测点中任意一个节点电压灵敏度的大小, 将直接影响到该组待选可测点是否被优先选取或者被淘汰。

$$SD^i = \sqrt[m_2]{\prod_{i=1}^{m_2} \sum_{j=1}^{bf} \omega(S_{P_j}^{U_{m_i}}) m(S_{P_j}^{U_{m_i}})} \quad (5-34)$$

式中,  $m_2$  表示为每一组待选可测点的个数;  $\omega(S_{P_j}^{U_{m_i}}) = \bar{S}_{P_j}^{U_{m_i}} - \tilde{S}_{P_j}^{U_{m_i}}$ ;  $m(S_{P_j}^{U_{m_i}}) = (\bar{S}_{P_j}^{U_{m_i}} + \tilde{S}_{P_j}^{U_{m_i}})/2$ 。  $\bar{S}_{P_j}^{U_{m_i}}$  和  $\tilde{S}_{P_j}^{U_{m_i}}$  分别表示第  $i$  个待选可测点对故障基集合中第  $j$  个元件灵敏度区间值的上端点和下端点值。

其次, 由式 (5-33) 计算每一个待选可测点对故障基集合中每一个元件变化的零电流门限灵敏度值。然后, 按照式 (5-35) 计算每一组待选可测点对故障基集合中所有元件变化的零电流门限灵敏度的均值  $TD^i (i=1, 2, \dots, S)$ , 即:

$$TD^i = \frac{1}{m} \left| \sum_{j=1}^{bf} m(S_{P_j}^{D_0}) \right| \quad (5-35)$$

式中,  $m(S_{P_j}^{D_0}) = (\hat{S}_{P_j}^{D_0} + \tilde{S}_{P_j}^{D_0})/2$ ,  $\hat{S}_{P_j}^{D_0}$  和  $\tilde{S}_{P_j}^{D_0}$  分别表示零电流门限灵敏度的上端点和下端点值。

为了方便从  $S$  组待选可测点基集合中优化选择出一组较为理想的可测点, 可根据式 (5-34) 和式 (5-35) 计算得到的数据构造一个区间系数优化矩阵  $\mathbf{G}_S$ 。 $\mathbf{G}_S$  阵的行对应  $SD$  和  $TD$  的值; $\mathbf{G}_S$  的列对应于  $S$  中每一组待选可测点的组合, 即  $\mathbf{G}_S$  为:

$$\mathbf{G}_S = \begin{bmatrix} SD^1 & SD^2 & \cdots & SD^S \\ TD^1 & TD^2 & \cdots & TD^S \end{bmatrix} \quad (5-36)$$

综合考虑上述各种因素, 将系数优化矩阵  $\mathbf{G}_S$  中每一列元素相乘, 然后构造一个优化系数  $\mathbf{ST}^i$  ( $i=1, 2, \dots, S$ )。 $\mathbf{ST}^i$  是一个  $(1 \times S)$  阶矩阵, 它的列对应于  $S$  中每一组待选可测点的组合。

$$\mathbf{ST}^i = SD^i \cdot TD^i \quad (5-37)$$

$\mathbf{ST}^i$  阵中最大值, 即  $\max(\mathbf{ST}^i)$  所对应的列就是容差子网络  $N_1$  优化选择的一组较为理想的可测点, 即:

$$\max_{i=1}^S (\mathbf{ST}^i) = \max(\mathbf{ST}^1, \mathbf{ST}^2, \dots, \mathbf{ST}^S) \quad (5-38)$$

当然, 也可以从工程实际网络出发, 考虑工程上对可测点设计的具体要求以及方便性等诸方面因素, 对  $SD^i$ ,  $TD^i$  分别作适当的加权处理, 以满足具体需要。例如: 有两组待选可测点集  $I_{t1}$ , 假如它们的  $SD$  和  $TD$  参数值接近相同, 但是待选可测点集  $I_{t2}$  在工艺上不易实现,  $I_{t3}$  在工艺上易于实现, 因此, 可以对  $SD^j$  和  $TD^j$  的值进行适当加权, 以满足设计上的客观需要。

### 5.7.1 容差网络可测点合理选择示例一

如图 5-12 所示是一个具有 7 个独立节点, 16 条支路的电网络  $N$ 。网络中各元件参数值见表 5-10。外激励源  $I_S$  为 0.2A, 各元件参数值的容差均按  $\pm 5\%$  变化。现在研究从子网络电路中优化选择出一组较为合理的可测点。

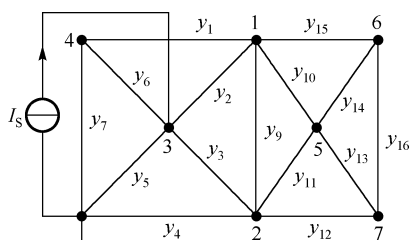


图 5-12 网络  $N$

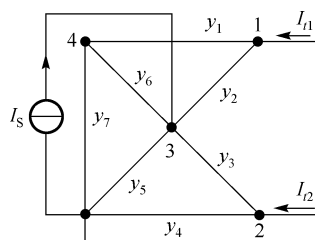


图 5-13 子网络  $N_1$

表 5-10 电网络各支路元件参数值 (单位: S)

支路号	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$y_7$	$y_8$
标称值	0.4	0.7	0.5	0.9	0.45	0.2	0.8	0
支路号	$y_9$	$y_{10}$	$y_{11}$	$y_{12}$	$y_{13}$	$y_{14}$	$y_{15}$	$y_{16}$
标称值	0.12	0.36	0.75	0.8	0.10	0.6	0.55	0.75



假设在第  $i$  次撕裂诊断时, 将网络撕裂成两部分, 现考虑子网络  $N_1$  见图 5-13。如果子网络  $N_1$  中的待选可测点基集合为:  $\{1, 2; 1, 3; 2, 3; 2, 4; 3, 4\}$ , 即  $S=5$ 。假设网络中经常发生故障的元件的基集合为:  $\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ , 即  $bf=5$ 。由式 (5-30) 和式 (5-33) 可算出每一组待选可测点的电压灵敏度和零电流门限灵敏度的区间值, 见表 5-11。

表 5-11 待选可测点优化系数

支路		$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$
代选可测点						
(1,2)	$S_{P_j}^{U_i}$	-0.0455413	0.0247948	-0.0120819	-0.0398061	-0.1097819
		-0.0334526	0.0396964	-0.0093024	-0.0360150	-0.0993264
	$S_{P_j}^{U_i}$	-0.0185239	0.0036079	0.0296932	-0.0623143	-0.0757290
		-0.0136068	0.0057762	0.0385655	-0.0563796	-0.0685167
	$S_{P_j}^{D_0}$	-0.0409015	0.0137484	0.0252144	-0.0815971	-0.1249341
		-0.0291921	0.0255940	0.0369872	-0.0784639	-0.1234391
(1,3)	$S_{P_j}^{U_i}$	-0.0455413	0.0247948	-0.0120819	-0.0398061	-0.1097819
		-0.0334526	0.0396964	-0.0093024	-0.0360150	-0.0993264
	$S_{P_j}^{U_i}$	-0.0188397	-0.0252922	-0.0566155	-0.0336527	-0.1704135
		-0.0138388	-0.0157978	-0.0435907	-0.0304477	-0.1541837
	$S_{P_j}^{D_0}$	-0.0419960	-0.1540552	-0.2062836	-0.0832290	-0.5169250
		0.0062393	-0.0730645	-0.1512998	-0.0765681	-0.4898118
(2,3)	$S_{P_j}^{U_i}$	-0.0185239	0.0036079	0.0296932	-0.0623143	-0.0757290
		-0.0136068	0.0057762	0.0385655	-0.0563796	-0.0685167
	$S_{P_j}^{U_i}$	-0.0188397	-0.0252922	-0.056615529	-0.0336527	-0.1704135
		-0.0138388	-0.0157978	-0.043590692	-0.0304477	-0.1541837
	$S_{P_j}^{D_0}$	-0.0384157	-0.0291362	-0.0468091	-0.0847664	-0.2426601
		-0.0215930	-0.0083105	-0.0117376	-0.0753668	-0.2253186
(2,4)	$S_{P_j}^{U_i}$	-0.0185239	0.0036079	0.0296931	-0.0623143	-0.0757290
		-0.0136068	0.0057762	0.0385655	-0.0563796	-0.0685167
	$S_{P_j}^{U_i}$	0.0230920	0.0048274	-0.0115399	-0.0161807	-0.0557110
		0.0314367	0.0077286	-0.0088851	-0.0146397	-0.0504052
	$S_{P_j}^{D_0}$	0.0118927	0.0090871	0.0135897	-0.0814739	-0.1420750
		0.0283126	0.0169270	0.0276966	-0.0787046	-0.1444408
(3,4)	$S_{P_j}^{U_i}$	-0.0188397	-0.0252922	-0.0566155	-0.0336527	-0.1704135
		-0.0138388	-0.0157978	-0.0435907	-0.0304477	-0.1541837
	$S_{P_j}^{U_i}$	0.0230920	0.0048274	-0.0115399	-0.0161807	-0.0557110
		0.0314367	0.0077286	-0.0088851	-0.0146397	-0.0504052
	$S_{P_j}^{D_0}$	-0.2220532	-0.1533592	-0.2188588	-0.0820940	-0.5146262
		-0.1354291	-0.0743609	-0.1387068	-0.0776069	-0.4919043

根据式 (5-34)、式 (5-35) 和式 (5-37) 分别求出  $SD^i$ 、 $TD^i$  和  $ST^i$  各系数值见表 5-12。

表 5-12 GS 优化矩阵和  $ST$  优化系数表

	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
$SD^i$	0.0942593	0.4467484	0.1960285	0.0847971	0.5272498
$TD^i$	0.0008981	0.0021543	0.0015298	0.0002351	0.0005636
$ST^i$	$0.08464 \times 10^{-3}$	$0.96153 \times 10^{-3}$	$0.29989 \times 10^{-3}$	$0.01994 \times 10^{-3}$	$0.29716 \times 10^{-3}$

从表 5-12 中的优化系数  $ST$  值可见, 在 5 组待选可测点集合中, 节点 (1,3) 对应的优化

系数  $ST$  值最大, 而节点 (2,4) 对应的  $ST$  值最小, 所以我们选择 (1,3) 节点作为子网络  $N_1$  的可测点较为理想, 它有利于  $N_1$  的故障诊断。

现在我们通过选择最好的和最差的两组可测点计算子网络电路  $N_1$  撕裂端口的零电流门限  $D_0$  值的大小来证实选择节点 (1,3) 作为  $N_1$  的可测点是较为理想的, 而选择节点 (2,4) 作为可测点是不理想的。

现将网络电路无故障时, 在可测点 (1,3) 和 (2,4) 的电压区间值分别代入式 (5-31) 和式 (5-32) 中, 则可以算出它们分别对应  $N_1$  撕裂端口的零电流门限  $D_0$  的区间值见表 5-13。

表 5-13 零电流门限  $D_0$  的区间值 (单位: V)

$U_i$	$U_1$	$U_3$	$U_2$	$U_4$
	0.1220202 0.1103992	0.1894110 0.1713718	0.1220202 0.1103992	0.0619216 0.0560243
$D_0$	0.0240722    -0.0229034		0.1208669    -0.1144552	

为了便于直观地比较, 现将这两组可测点对应的  $D_{0i}$  ( $D_{01}$  对应于可测点 (1,3) 的零门限,  $D_{02}$  对应于可测点 (2,4) 的零门限) 的大小, 在同一个数轴上分别标出它们的区间值, 见图 5-14。

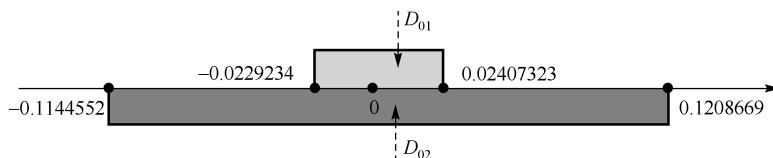


图 5-14 零门限图

从图 5-14 中可见, 可测点 (1,3) 对应的零门限  $D_{01}$ , 它的区间宽度比可及点 (2,4) 对应的零门限  $D_{02}$  的区间宽度小, 即  $\omega(D_{01}) < \omega(D_{02})$ , 所以选择节点 (1,3) 作为  $N_1$  的可测点是理想的。它有利于  $N_1$  的故障诊断; 而选择可测点 (2,4) 作为可测点, 由于它的零门限  $D_{02}$  的区间宽度较大, 所以它可能会造成故障误诊断。换一句话说, 选择较小的零门限区间宽度的可测点, 当  $N_1$  发生故障时能够明显地将电路元件的容差与发生故障区分开。

### 5.7.2 容差网络可测点合理选择示例二

现在研究含有受控源容差网络可及点的优化问题。图 5-15 是一个具有 19 个独立节点, 32 条支路的网络。在节点 4 和参考点之间外加 0.1A 的电流源激励。网络中存在两个受控源支路, 受控系数  $\beta_0$  和  $\beta_1$  的大小分别是 2 和 1。网络中各元件的参数标称值均按  $y_i$  的下标 ( $i \times 0.1S$ ) 取值 (如  $y_9 = 0.9S$ )。元件容差按  $\pm 5\%$  变化。假设第  $i$  次撕裂是在节点 8、9 和 10 处将  $N$  撕裂成  $N_1$ , 如图 5-16 所示。

如果子网络电路  $N_1$  的待选可测点基集合为:  $\{1, 2, 4; 1, 3, 4; 1, 5, 4; 1, 4, 6; 2, 4, 6; 3, 4, 6; 3, 4, 10; 3, 4, 18; 3, 4, 5; 4, 6, 9; 4, 5, 16; 4, 9, 10; 4, 6, 19; 2, 4, 17; 2, 3, 4\}$ , 即共有 15 组待选可测点。子网络级电路  $N_1$  中的故障基集合为:  $\{y_3, y_7, y_{10}, y_{19}, y_{21}, y_{24}\}$ , 即  $bf = 6$ 。现在研究如何从 15 组待选可测点中优化选择出一组较为理想的节点作为子网络级电路  $N_1$  的可测点。

根据 5.7 节容差子网络级电路可测点优化选择公式和方法可算出每一组待选可测点的  $S_{p_j}^{U_i}$  和  $S_{p_j}^{D_0}$  的区间值, 以及  $G_S$ 、 $ST$  优化系数矩阵。计算结果见表 5-14 和表 5-15。

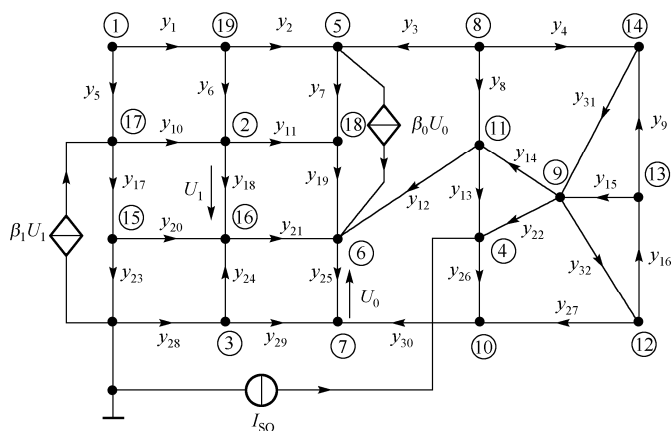
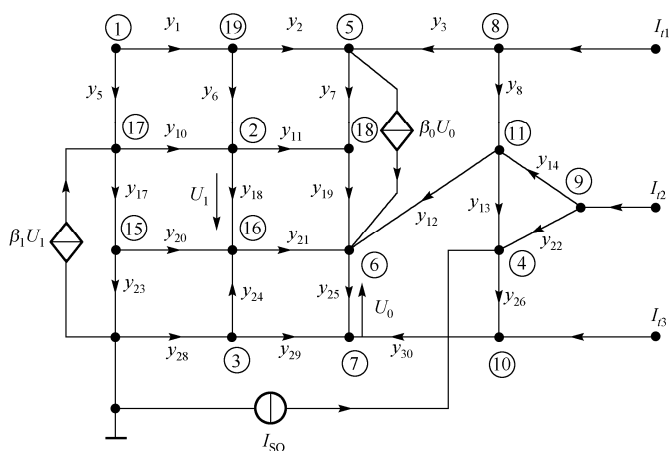


图 5-15 容差网络 N

图 5-16 电路子网络  $N_1$ 表 5-14 待选可测点的  $S_{p_j}^{U_i}$  和  $S_{p_j}^{D_0}$  的区间值

待选 可测点	灵敏度	$y_3$	$y_7$	$y_{10}$	$y_{19}$	$y_{21}$	$y_{24}$
(1,2,4)	$S_{p_j}^{U_1}$	0.0013113	-0.0005671	0.0005539	-0.0003747	-0.0001770	-0.0003371
		0.0026770	-0.0001864	0.0011706	0.0007571	-0.0001044	-0.0000711
	$S_{p_j}^{U_2}$	0.0011888	-0.0000250	-0.0030076	-0.0004032	-0.0001165	-0.0006016
		0.0024271	-0.0000082	-0.0014230	0.0008146	-0.0000687	-0.0001268
	$S_{p_j}^{U_3}$	-0.0041619	-0.0007121	-0.0011909	-0.0000446	-0.0025035	-0.0001213
		-0.0020385	-0.0002341	-0.0005634	0.0000221	-0.0014766	-0.0000256
	$S_{p_j}^{D_0}$	-2.4890862	-0.2183315	-3.7013957	-2.9724428	-0.0486381	-0.9116286
		2.0054280	0.6799517	0.1010718	2.9626182	0.1542999	0.7691496
(1,3,4)	$S_{p_j}^{U_1}$	0.0013113	-0.0005671	0.0005539	-0.0003747	-0.0001770	-0.0003371
		0.0026770	-0.0001864	0.0011706	0.0007571	-0.0001044	-0.0000711
	$S_{p_j}^{U_2}$	-0.0001323	-0.0000159	-0.0007452	-0.0000079	-0.0005357	0.0001056
		-0.0000648	-0.0000052	-0.0003526	0.0000159	-0.0003160	0.0005010
	$S_{p_j}^{U_3}$	-0.0041619	-0.0007121	-0.0011909	-0.0000446	-0.0025035	-0.0001213
		-0.0020385	-0.0002341	-0.0005634	0.0000221	-0.0014766	-0.0000256
	$S_{p_j}^{D_0}$	-0.0822552	-0.0264241	-0.0233677	-0.0308698	-0.0425030	-0.039091
		0.0122032	0.0026816	0.0389564	0.0333154	-0.0108229	0.0164997

续表

待选 可测点	灵敏度	$y_3$	$y_7$	$y_{10}$	$y_{19}$	$y_{21}$	$y_{24}$
(1,4,5)	$S_{P_j}^{U_i}$	0.0013113 0.0026770	-0.0005671 -0.0001864	0.0005539 0.0011706	-0.0003747 0.0007571	-0.0001770 -0.0001044	-0.0003371 -0.0000711
	$S_{P_j}^{U_{i_4}}$	0.0074622 0.0152348	-0.0119764 -0.0039377	-0.0011969 -0.0005663	-0.0008037 0.0016238	0.0008678 0.0014714	0.0001287 0.0006104
	$S_{P_j}^{U_{i_5}}$	-0.0041619 -0.0020385	-0.0007121 -0.0002341	-0.0011909 -0.0005634	-0.0000446 0.0000221	-0.0025035 -0.0014766	-0.0001213 -0.0000256
	$S_{P_j}^{D_0}$	-0.6432476 0.3164539	-0.2801701 0.6377148	-0.0054547 0.1780179	-0.32225120.3 272562	-0.0859272 -0.0178075	-0.0895702 0.0402212
(1,4,6)	$S_{P_j}^{U_i}$	0.00131130.0 026770	-0.0005671 -0.0001864	0.0005539 0.0011706	-0.0003747 0.0007571	-0.0001770 -0.0001044	-0.0003371 -0.0000711
	$S_{P_j}^{U_{i_4}}$	-0.0041619 -0.0020385	-0.0007121 -0.0002341	-0.0011909 -0.0005634	-0.0000446 0.0000221	-0.0025035 -0.0014766	-0.0001213 -0.0000256
	$S_{P_j}^{U_{i_6}}$	0.0001765 0.0003603	0.0000963 0.0002928	-0.0014179 -0.0006708	-0.0002770 0.0001371	-0.0039885 -0.0023525	-0.0005274 -0.0001112
	$S_{P_j}^{D_0}$	-0.1877321 -0.0220762	-0.0203713 0.0519008	-0.1294153 -0.0154050	-0.1210523 0.1036888	-0.1357682-0. 0702091	-0.0402218 0.0389232
(2,4,6)	$S_{P_j}^{U_i}$	0.00118880.0 024271	-0.0000250 -0.0000082	-0.0030076 -0.0014230	-0.0004032 0.0008146	-0.0001165 -0.0000687	-0.0006016 -0.0001268
	$S_{P_j}^{U_{i_4}}$	-0.0041619 -0.0020385	-0.0007121 -0.0002341	-0.0011909 -0.0005634	-0.0000446 0.0000221	-0.0025035 -0.0014766	-0.0001213 -0.0000256
	$S_{P_j}^{U_{i_6}}$	0.0001765 0.0003603	0.0000963 0.0002928	-0.0014179 -0.0006708	-0.0002770 0.0001371	-0.0039885 -0.0023525	-0.0005274 -0.0001112
	$S_{P_j}^{D_0}$	-0.1400228 -0.0467413	-0.0135616 0.0158544	-0.0260815 0.1095562	-0.1134277 0.0969312	-0.1568477 -0.0727405	-0.0452876 0.0512831
(3,4,6)	$S_{P_j}^{U_i}$	-0.0001323 -0.0000648	-0.0000159 -0.0000052	-0.0007452 -0.0003526	-0.0000079 0.0000159	-0.0005357 -0.0003160	0.0001056 0.0005010
	$S_{P_j}^{U_{i_4}}$	-0.0041619 -0.0020385	-0.0007121 -0.0002341	-0.0011909 -0.0005634	-0.0000446 0.0000221	-0.0025035 -0.0014766	-0.0001213 -0.0000256
	$S_{P_j}^{U_{i_6}}$	0.0001765 0.0003603	0.0000963 0.0002928	-0.0014179 -0.0006708	-0.0002770 0.0001371	-0.0039885 -0.0023525	-0.0005274 -0.0001112
	$S_{P_j}^{D_0}$	-0.0744850 -0.0239555	-0.0148507 0.0006517	-0.0253633 0.0130185	-0.0072944 0.0069286	-0.0459629 -0.0296433	-0.0282930 0.0120691
(3,4,10)	$S_{P_j}^{U_i}$	-0.0001323 -0.0000648	-0.0000159 -0.0000052	-0.0007452 -0.0003526	-0.0000079 0.0000159	-0.0005357 -0.0003160	0.0001056 0.0005010
	$S_{P_j}^{U_{i_4}}$	-0.0041619 -0.0020385	-0.0007121 -0.0002341	-0.0011909 -0.0005634	-0.0000446 0.0000221	-0.0025035 -0.0014766	-0.0001213 -0.0000256
	$S_{P_j}^{U_{i_{10}}}$	-0.0030369 -0.0014875	-0.0004918 -0.0001617	-0.0011510 -0.0005446	-0.0000626 0.0000310	-0.0023833 -0.0014057	-0.0000759 -0.0000160
	$S_{P_j}^{D_0}$	-0.0807376 -0.0158422	-0.0158523 0.0009859	-0.0270426 0.0066220	-0.0026394 0.0022236	-0.0428974 -0.0128278	-0.0154376 0.0094357
(3,4,18)	$S_{P_j}^{U_i}$	-0.0001323 -0.0000648	-0.0000159 -0.0000052	-0.0007452 -0.0003526	-0.0000079 0.0000159	-0.0005357 -0.0003160	0.0001056 0.0005010
	$S_{P_j}^{U_{i_4}}$	-0.0041619 -0.0020385	-0.0007121 -0.0002341	-0.0011909 -0.0005634	-0.0000446 0.0000221	-0.0025035 -0.0014766	-0.0001213 -0.0000256
	$S_{P_j}^{U_{i_{18}}}$	0.0018558 0.0037888	0.0004653 0.0014151	-0.0018487 -0.0008747	-0.0009221 0.0018630	-0.0018044 -0.0010643	-0.0003342 -0.0000705
	$S_{P_j}^{D_0}$	-0.0807950 0.0011641	-0.02110380. 0130700	-0.0356291 0.0193137	-0.0417944 0.0436704	-0.0501529 -0.0155454	-0.0325980 0.0132671

续表

待选 可测点	灵敏度	$y_3$	$y_7$	$y_{10}$	$y_{19}$	$y_{21}$	$y_{24}$
(3,4,5)	$S_{P_j}^{U_3}$	-0.0001323 -0.0000648	-0.0000159 -0.0000052	-0.0007452 -0.0003526	-0.0000079 0.0000159	-0.0005357 -0.0003160	0.0001056 0.0005010
	$S_{P_j}^{U_4}$	-0.0041619 -0.0020385	-0.0007121 -0.0002341	-0.0011909 -0.0005634	-0.0000446 0.0000221	-0.0025035 -0.0014766	-0.0001213 -0.0000256
	$S_{P_j}^{U_5}$	0.0074622 0.0152348	-0.0119764 -0.0039377	-0.0011969 -0.0005663	-0.0008037 0.0016238	0.0008678 0.0014714	0.0001287 0.0006104
	$S_{P_j}^{D_0}$	-0.1134175 0.0804629	-0.1236344 0.0446585	-0.0331349 0.0250835	-0.0281370 0.0302727	-0.0445469 -0.001801	-0.0384511 0.0200904
(4,6,9)	$S_{P_j}^{U_3}$	-0.0041619 -0.0020385	-0.0007121 -0.0002341	-0.0011909 -0.0005634	-0.0000446 0.0000221	-0.0025035 -0.0014766	-0.0001213 -0.0000256
	$S_{P_j}^{U_6}$	0.0001765 0.0003603	0.0000963 0.0002928	-0.0014179 -0.0006708	-0.0002770 0.0001371	-0.0039885 -0.0023525	-0.0005274 -0.0001112
	$S_{P_j}^{U_9}$	-0.0048525 -0.0023768	-0.0008526 -0.0002803	-0.0011986 -0.0005671	-0.0000266 0.0000132	-0.0024917 -0.0014696	-0.0001235 -0.0000260
	$S_{P_j}^{D_0}$	-0.0777259 0.0054917	-0.0167964 0.0060897	-0.0241509 0.0009463	-0.0050203 0.0047382	-0.0395420 -0.0171536	-0.0060157 0.0035671
(4,5,16)	$S_{P_j}^{U_3}$	-0.0041619 -0.0020385	-0.0007121 -0.0002341	-0.0011909 -0.0005634	-0.0000446 0.0000221	-0.0025035 -0.0014766	-0.0001213 -0.0000256
	$S_{P_j}^{U_5}$	0.0074622 0.0152348	-0.0119764 -0.0039377	-0.0011969 -0.0005663	-0.0008037 0.0016238	0.0008678 0.0014714	0.0001287 0.0006104
	$S_{P_j}^{U_{16}}$	0.0003868 0.0007896	0.0000197 0.0000598	-0.0011975 -0.0005666	-0.0000860 0.0001736	0.0005181 0.0008784	-0.0010076 -0.0002124
	$S_{P_j}^{D_0}$	-0.6693666 0.1558523	-0.2275647 0.6964650	-0.0720797 -0.0244347	-0.2033691 0.1866902	0.0519679 0.0389981	-0.1631916 0.0496849
(4,9,10)	$S_{P_j}^{U_3}$	-0.0041619 -0.0020385	-0.0007121 -0.0002341	-0.0011909 -0.0005634	-0.0000446 0.0000221	-0.0025035 -0.0014766	-0.0001213 -0.0000256
	$S_{P_j}^{U_9}$	-0.0048525 -0.0023768	-0.0008526 -0.0002803	-0.0011986 -0.0005671	-0.0000266 0.0000132	-0.0024917 -0.0014696	-0.0001235 -0.0000260
	$S_{P_j}^{U_{10}}$	-0.0030369 -0.0014875	-0.0004918 -0.0001617	-0.0011510 -0.0005446	-0.0000626 0.0000310	-0.0023833 -0.0014057	-0.0000759 -0.0000160
	173.3210	-0.1186573 0.0338557	-0.0253510 0.0122546	-0.0342852 0.0118143	-0.0029838 0.0027382	-0.0587710 0.0078242	-0.0046117 0.0026458
(4,6,19)	$S_{P_j}^{U_3}$	-0.0041619 -0.0020385	-0.0007121 -0.0002341	-0.0011909 -0.0005634	-0.0000446 0.0000221	-0.0025035 -0.0014766	-0.0001213 -0.0000256
	$S_{P_j}^{U_6}$	0.0001765 0.0003603	0.0000963 0.0002928	-0.0014179 -0.0006708	-0.0002770 0.0001371	-0.0039885 -0.0023525	-0.0005274 -0.0001112
	$S_{P_j}^{U_{19}}$	0.0025965 0.0053010	-0.0027411 -0.0009012	-0.0021410 -0.0010130	-0.0004890 0.0009880	0.0001354 0.0002296	-0.0003029 -0.0000639
	0	-0.2062907 -0.0158045	-0.0361518 0.1167605	-0.0465966 0.0544983	-0.0902679 0.0773231	-0.1041857 -0.0892172	-0.0286670 0.0222838
(2,4,17)	$S_{P_j}^{U_2}$	0.0011888 0.0024271	-0.0000250 -0.0000082	-0.0030076 -0.0014230	-0.0004032 0.0008146	-0.0001165 -0.0000687	-0.0006016 -0.0001268
	$S_{P_j}^{U_4}$	-0.0041619 -0.0020385	-0.0007121 -0.0002341	-0.0011909 -0.0005634	-0.0000446 0.0000221	-0.0025035 -0.0014766	-0.0001213 -0.0000256
	$S_{P_j}^{U_{17}}$	0.0010542 0.0021523	-0.0001323 -0.0000435	0.0008672 0.0018330	-0.0003519 0.0007109	-0.0002583 -0.0001524	-0.0003440 -0.0000725
	$S_{P_j}^{D_0}$	-35.619829 38.957803	-3.7444920 1.3409848	3.917612088.0 0801	-61.341663 61.569699	-4.3121798 -0.8165351	-16.356865 18.716767

续表							
待选 可测点	灵敏度	$y_3$	$y_7$	$y_{10}$	$y_{19}$	$y_{21}$	$y_{24}$
(2,3,4)	$S_{P_j}^{U_2}$	0.0011888	-0.0000250	-0.0030076	-0.0004032	-0.0001165	-0.0006016
		0.0024271	-0.0000082	-0.0014230	0.0008146	-0.0000687	-0.0001268
	$S_{P_j}^{U_3}$	-0.0001323	-0.0000159	-0.0007452	-0.0000079	-0.0005357	0.0001056
		-0.0000648	-0.0000052	-0.0003526	0.0000159	-0.0003160	0.0005010
	$S_{P_j}^{U_4}$	-0.0041619	-0.0007121	-0.0011909	-0.0000446	-0.0025035	-0.0001213
		-0.0020385	-0.0002341	-0.0005634	0.0000221	-0.0014766	-0.0000256
	$S_{P_j}^{D_0}$	-0.0742232	-0.0151396	-0.0483655	-0.0264290	-0.0406771	-0.0402161
		-0.0070234	-0.0012962	0.0154932	0.0270630	-0.0099952	0.0179650

表 5-15 优化系数表

待选 可测点	$SD^i$	$TD^i$	$ST^i$	$ST_{\max}^i$
(1,2,4)	0.6115006	3.3269088	2.0344068	
(1,3,4)	0.0252796	1.8186330	0.0459743	
(1,5,4)	0.0092059	9.2258044	0.0849318	
(1,4,6)	0.0912898	5.7038394	0.5207022	
(2,4,6)	0.0568476	4.0849055	0.2322172	
(3,4,6)	0.0361967	2.2329870	0.0808268	
(3,4,10)	0.0323349	2.2257657	0.0719700	
(3,4,18)	0.0311889	2.1264427	0.0663214	
(3,4,5)	0.0304257	3.6117955	0.1098915	
(4,6,9)	0.0275953	8.7695981	0.2419997	
(4,5,16)	0.0300580	5.0650256	0.1522446	
(4,9,10)	0.0289212	8.7412377	0.2528072	
(4,6,19)	0.0577193	6.9449777	0.4008592	
(2,4,17)	15.0532179	3.2943421	49.5904488	49.5904488
(2,3,4)	0.0338074	1.3024462	0.0440323	

从表 5-15 中的计算结果可见，在 15 组待选可测点的基集合中节点（2,4,17）对应的优化系数最大，所以选择（2,4,17）作为子网络级电路  $N_1$  的可测点是最理想的，而选择节点（2,3,4）作为子网络级电路  $N_1$  的可测点是最不理想的（具体分析详见 5.8 节）。

5.8 优化选择可测点对子网络故障诊断的影响

现在我们仍然以图 5-15 和图 5-16 为例，分析合理优化、选择可测点对子网络级故障诊断的重要性。下面我们分别讨论选择最理想的可测点（2,4,17）和最不理想的可测点（2,3,4）对子网络  $N_1$  故障诊断的影响。

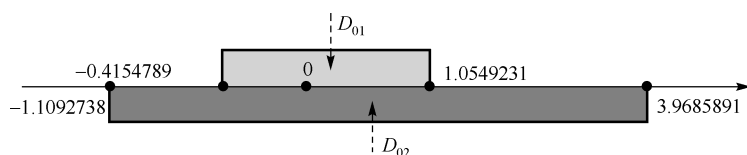
5.8.1 可测点合理选择对子网络  $N_1$  零门限  $D_0$  的影响

若网络  $N$  无故障时，应用 Markov 迭代法可算出网络  $N$  各个可测点的电压区间值。然后，在子网络  $N_1$  中分别选择可测点（2,4,17）和（2,3,4），并将它们的电压区间值分别代入式（5-31）和式（5-32）中，则可算出  $N_1$  无故障时撕裂端口的零电流门限  $D_0$ （现在用  $D_{01}$  表示可测点（2,4,17）对应的零门限； $D_{02}$  表示可测点（2,3,4）对应的零门限）的区间值，见表 5-16。

表 5-16 零电流门限  $D_0$  的区间值 (单位: V)

	$U_2$	$U_4$	$U_{17}$
电压区间值	0.0311924 0.0282217	0.0891218 0.0806340	0.0235408 0.0212988
$D_{01}$	$(-0.4154789, 1.0549231) \times 10^3$		
	$U_2$	$U_3$	$U_4$
电压区间值	0.0311924 0.0282217	0.0248960 0.0225249	0.0891218 0.0806340
$D_{02}$	$(-1.1092738, 3.9685891) \times 10^3$		

为了便于更直观地比较零电流门限  $D_{01}$  和  $D_{02}$  区间宽度的大小, 在同一个数轴上分别标出  $D_{01}$  和  $D_{02}$  的区间值, 门限图  $D_0$  如图 5-17 所示。

图 5-17 门限图  $D_0$ 

从图 5-17 中可见, 零门限  $D_{02}$  的区间宽度比  $D_{01}$  的区间宽度大, 即  $\omega(D_{01}) < \omega(D_{02})$ 。所以选择节点 (2,3,4) 作为  $N_1$  的可测点是不理想的, 它不利于  $N_1$  的故障诊断。

### 5.8.2 可测点合理选择对子网络故障诊断的影响

1) 如果选择 (2,4,17) 作为子网络  $N_1$  的可测点, 现在分析网络在下列三种故障情况下的诊断结果。

(1) 当网络  $N$  中元件  $y_{10}$  和  $y_{12}$  参数发生故障 (见图 5-15)。 $y_{10}$  从 1S 变到 10S;  $y_{12}$  从 1.2S 变到 12S。现将可测点 (2,4,17) 的电压测量值代入式 (5-31) 和式 (5-32) 中, 则可算出撕裂端口  $D_f$  的区间值。为了便于分析比较, 现将  $D_0$  和  $D_f$  的区间值在同一个表中列出, 见表 5-17, 其门限图如图 5-18 所示。

表 5-17  $D_0$  和  $D_f$  的区间值 (单位: V)

无故障情况			故障情况		
$U_2$	$U_4$	$U_{17}$	$U_2$	$U_4$	$U_{17}$
0.0311924 0.0282217	0.0891218 0.0806340	0.0235408 0.0212988	0.0248821	0.0711307	0.0235968
$D_0$	$(-0.4154789, 1.0549231) \times 10^3$		$D_f$	$(-1.7767809, -3.159426) \times 10^3$	

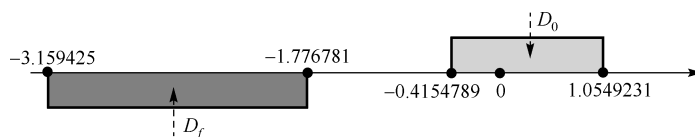


图 5-18 门限图

从图 5-18 可见,  $D_f$  与  $D_0$  的交集为空集, 即  $D_f \cap D_0 = \emptyset$ 。说明选择 (2,4,7) 作为  $N_1$  的可测点时, 能正确诊断出  $N_1$  内部发生故障。

(2) 如果网络 N 中元件  $y_{10}$  和  $y_{12}$  的参数值发生故障,  $y_{10}$  由 1S 变为 0.1S,  $y_{12}$  由 1.2S 变为 0.12S。现将可及点 (2,4,17) 的电压测量值代入式 (5-31) 和式 (5-32) 中则可算出  $D_f$  的区间值。为便于分析比较, 现将  $D_0$  和  $D_f$  的区间值在同一个表中列出, 见表 5-18, 其门限图如图 5-19 所示。

表 5-18  $D_0$  和  $D_f$  的区间值 (单位: V)

无故障情况			故障情况		
$U_2$	$U_4$	$U_{17}$	$U_2$	$U_4$	$U_{17}$
0.0311924	0.0891218	0.0235408	0.1415371	0.1240967	0.2853863
0.0282217	0.0806340	0.0212988			
$D_0$	$(-0.4154789, 1.0549231) \times 10^3$		$D_f$	$(1.1419828, 4.0424880) \times 10^3$	

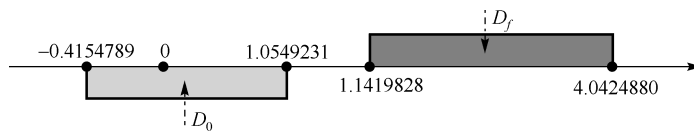


图 5-19 门限图

从图 5-19 中可见,  $D_f \cap D_0 = 0$ , 所以选择节点 (2,4,17) 作为子网络  $N_1$  的可测点, 能正确诊断出子网络  $N_1$  发生故障。

(3) 如果网络 N 中元件  $y_{12}$  的参数值发生故障,  $y_{12}$  从 1.2S 变为 12S,  $y_{10}$  的参数值不变。现将可及点 (2,4,17) 的电压测量值代入式 (5-31) 和式 (5-32) 中, 则可算出  $D_f$  的区间值。为便于分析比较, 现将  $D_0$  和  $D_f$  的区间值在同一个表中列出, 见表 5-19, 其门限图如图 5-20 所示。

表 5-19  $D_0$  和  $D_f$  的区间值 (单位: V)

无故障情况			故障情况		
$U_2$	$U_4$	$U_{17}$	$U_2$	$U_4$	$U_{17}$
0.0311924	0.0891218	0.0235408	0.02908814	0.0729562	0.0210682
0.0282217	0.0806340	0.0212988			
$D_0$	$(-0.4154789, 1.0549231) \times 10^3$		$D_f$	$(-2.0048815, -3.6585831) \times 10^3$	

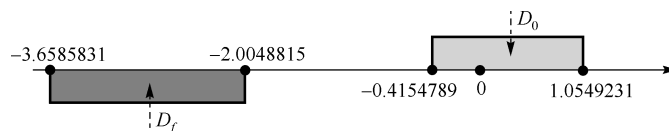


图 5-20 门限图

从图 5-20 中可见,  $D_f \cap D_0 = 0$ 。所以在子网络中选择 (2,4,17) 为可测点, 也能正确诊断出子网络发生故障。

2) 如果选择 (2,3,4) 作为子网络  $N_1$  的可测点, 同样分析在下列三种故障情况下的诊断结果。

(1) 如果网络 N 中的元件  $y_{10}$  和  $y_{12}$  参数发生故障 (见图 5-15), 假设  $y_{10}$  从 1S 变到 10S,  $y_{12}$  从 1.2S 变到 12S。现在把可测点 (2,3,4) 的电压测量值代入式 (5-31) 和式 (5-32) 中, 则可算出  $D_f$  的区间值。为了便于分析比较, 现将  $D_0$  和  $D_f$  的区间值列于同一个表中, 见表 5-20, 其门限图如图 5-21 所示。



表 5-20  $D_0$  和  $D_f$  的区间值 (单位: V)

无故障情况			故障情况		
$U_2$	$U_3$	$U_4$	$U_2$	$U_3$	$U_4$
0.0311924	0.0248960	0.0891218	0.0248821	0.0221082	0.0711307
0.0282217	0.0225249	0.0806340			
$D_0$	$(-1.1092738, 3.9685891) \times 10^3$		$D_f$	$(-0.0009466, 0.0022789) \times 10^3$	

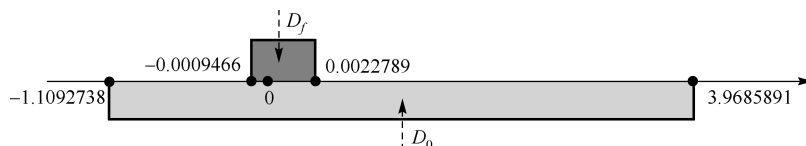


图 5-21 门限图

从图 5-21 中的诊断结果可见,  $D_0$  与  $D_f$  的交集不为空集, 即  $D_f \cap D_0 \neq \emptyset$ 。所以, 选择 (2,3,4) 作为  $N_1$  的可测点时, 在撕裂端口上无法判断出  $N_1$  发生故障, 将造成故障误诊断或漏诊断。

(2) 如果网络  $N$  中的元件  $y_{10}$  和  $y_{12}$  参数发生故障,  $y_{10}$  从 1S 变到 0.1S,  $y_{12}$  从 1.2S 变到 0.12S。把可测点 (2,3,4) 的电压测量值代入式 (5-31) 和式 (5-32) 中, 可算出  $D_f$  的区间值。为了便于分析比较, 现将  $D_0$  和  $D_f$  的区间值列于同一个表中, 见表 5-21, 其门限图如图 5-22 所示。

表 5-21  $D_0$  和  $D_f$  的区间值 (单位: V)

无故障情况			故障情况		
$U_2$	$U_3$	$U_4$	$U_2$	$U_3$	$U_4$
0.0311924	0.0248960	0.0891218	0.1415371	0.0355537	0.1240967
0.0282217	0.0225249	0.0806340			
$D_0$	$(-1.1092738, 3.9685891) \times 10^3$		$D_f$	$(-1.2136431, 4.1443172) \times 10^3$	

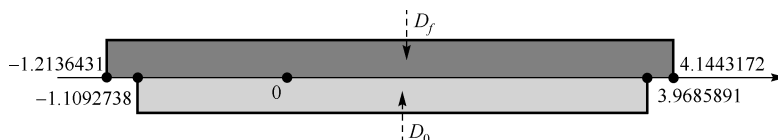


图 5-22 门限图

从图 5-22 的诊断结果可见:  $D_0$  与  $D_f$  的交集不为空集, 即  $D_f \cap D_0 \neq \emptyset$ 。所以, 在撕裂端口上无法判断出  $N_1$  发生故障, 同样造成故障误诊断或漏诊断。

(3) 如果网络  $N$  中  $y_{12}$  的参数发生故障,  $y_{12}$  参数值从 1.2S 变到 12S,  $y_{10}$  参数值不变。把可及点 (2,3,4) 的电压测量值代入式 (5-31) 和式 (5-32) 中, 则可算出  $D_f$  的区间值。为了便于分析比较, 现将  $D_0$  和  $D_f$  的区间值列于同一表中, 见表 5-22, 其门限图如图 5-23 所示。

表 5-22  $D_0$  和  $D_f$  的区间值 (单位: V)

无故障情况			故障情况		
$U_2$	$U_3$	$U_4$	$U_2$	$U_3$	$U_4$
0.0311924	0.0248960	0.0891218	0.02908814	0.0231829	0.0729562
0.0282217	0.0225249	0.0806340			
$D_0$	$(-1.1092738, 3.9685891) \times 10^3$		$D_f$	$(-0.0008407, 0.002413) \times 10^3$	

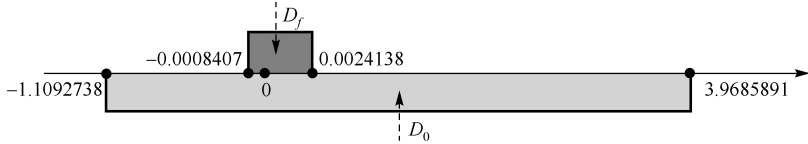


图 5-23 门限图

从图 5-23 中可见,  $D_f$  与  $D_0$  的交集不为空集, 即  $D_f \cap D_0 \neq \emptyset$ 。所以, 选择节点 (2,3,4) 作为  $N_1$  的可测点时, 在撕裂端口上无法判断出  $N_1$  发生故障, 将造成误诊断或漏诊断。

通过以上两个示例分析比较可见, 合理选择可测点对子网络级故障诊断是十分重要的, 若可测点选择不合理, 将会造成故障误诊断或者漏诊断。

## 5.9 本章小结

本章首先在电路故障可诊断定理的基础上, 把区间数学分析法应用于线性容差和非线性容差子网络级电路和元件级的故障诊断。文中应用 Markov 区间分析法揭示了容差与故障之间的内在联系, 界定了容差与故障之间的模糊界线。解决了容差网络电路故障的误诊断或无法诊断等问题。

此外, 电网络可测点的优化选择是故障诊断理论中另一至关重要的研究课题, 它涉及故障的可诊断性和准确性。特别是对含有容差电路的故障诊断, 合理地选择可测点显得更为重要, 如果电网络中可测点选择不合理, 将会造成故障误诊断或者漏诊断。本章在子网络级电路故障可诊断性定理和条件的基础上, 深入研究容差子网络级电路可测点的优化选择。如果把这些优化选择可测点的方法和交叉撕裂法结合起来, 用于整个容差网络可测点的优化设计, 它可以提高整个电网络可测点的重复利用率, 减小可测点所需要的数量, 简化在电路板上设计多个测试点的难度。这种优化选择可测试点的方法在实际工程故障诊断中具有重要的应用价值。

# 电力网络功率流程图原理及其应用

信号流图主要用于描述线性代数方程，包括经过拉普拉斯变换的微分方程或以代数方程形式出现的状态方程，是实现数、形结合的一种好方式。本章除讲述基本概念外，还研究图形约化及应用信号流图计算信号传递函数的各种方式和方法。

## 6.1 流图的基本概念

信号流图是图论应用中的一个重要内容，其基本功能是描述代数方程。因而可以用来描述电网络方程，反映网络中各个变量之间的相互关系，包括经过拉普拉斯变换的微分方程或以代数方程形式出现的状态方程。也可用于描述运算框图，反映一个系统内部的规律性。尽管它只是个点线图，但却是一种艺术性技巧，使数值与图形相结合。它运用节点表示所要描述的系统中的变量或所传递的信号，而以支路表示信号的传输量或信号的增益，故支路具有方向性，是有向图。由于节点和支路均已赋予“权”值，亦可称为加权有向图。如它把一组枯燥无味的数，结合相应的图形，使各个变量间的相互关系形象地表达出来，从而较为方便地进行直观分析或对线性代数方程组进行求解。而且，其图形变换对应着方程组的代数变换。所以，研究这种分析计算的方式方法，具有特别的意义。

一个信号流图对于一个写为因果形式的线性代数方程组，信号流图中的节点用点或者小圆圈表示，节点的权值代表所描述系统的变量，也称节点变量。权值为  $x$  的节点可称为节点  $x$ 。支路连接存在因果关系的变量所对应的节点，用有向线段表示，其方向离开作为因的变量的节点，指向作为果的变量的节点，表示信号只能沿着支路方向传输。支路的权值就是方程组中作为因的变量所乘的系数，也称支路传输值，信号沿支路传输时乘以该支路的传输值。

(1) 流图：由节点加有向曲线组成，节点为未知变量，曲线上的数字称为传输系数，也称为增益，流图也称为有向图。

(2) 根据图 6-1，给出信号流图的基本概念。

基本名词：入度——输入节点的支路数，如图 6-1 中入度为 2。

出度——输出节点的支路数，如图 6-1 中出度为 2。

源点——入度为零的点（电源点）。

汇点——出度为零的点（负荷点）。

中间节点——既有入度又有出度（开闭所）。

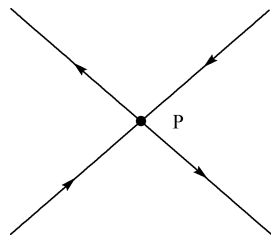


图 6-1 信号流图

## 6.2 流图与线性方程的关系

信号流图如图 6-2 所示, 根据信号流图写出方程:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + 3x_3 - 4 \\ x_2 = x_1 + 4x_3 + x_4 + 1 \\ x_3 = 2x_2 + x_4 \\ x_4 = 2x_3 \end{cases} \quad (6-1)$$

节点表示位置变量, 连线上的数字代表增益, 方向从等式右边的变量指向等式左边。

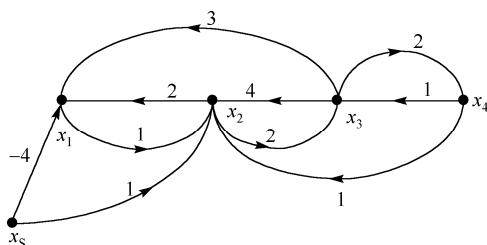


图 6-2 信号流图

## 6.3 功率流图与矩阵方程

求解方程  $AX = B$ , 构造  $X + AX = B + X \Rightarrow X = (E + A)X - B$ 。

构造一个连接矩阵  $C$ :

$$C = [E + A \mid -B] = [C' \mid -B]$$

$$c'_{ij} = e_{ij} + a_{ij}$$

(6-2)

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i \text{ 节点与 } j \text{ 节点之间没有关联, 无传输关系} \\ \neq 0 & \begin{cases} i = j & i \text{ 节点存在一个自环, 其增益为 } a_{ij} \\ i \neq j & i \text{ 节点与 } j \text{ 节点之间存在一条有向支路, 方向由 } j \text{ 指向 } i \end{cases} \end{cases}$$

例 6-1 根据矩阵求有向图:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解:

$$\begin{aligned} C &= [E + A \mid -B] \\ &= \left[ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

根据上式可作出其有向图如图 6-3 所示

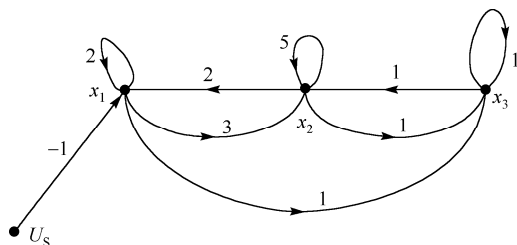


图 6-3 信号流图

例 6-2 如图 6-4 所示,  $U_s$  为电源点,  $i_1$ 、 $i_2$ 、 $i_3$  为变量(节点),  $U_4$  为负荷点, 画流图。  
根据上图可得:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ i_1 R_1 + i_2 R_2 = U_s \\ i_3(R_3 + R_4) - i_2 R_2 = 0 \\ U_4 = i_3 R_4 \end{cases}$$

整理为:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ R_1 & R_2 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 + R_4 & 0 \\ 0 & 0 & -R_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U_s$$

则

$$C = \left[ \begin{array}{cccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ R_1 & 1+R_2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -R_2 & 1+R_1+R_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_4 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

根据上式可作出所求的流图, 如图 6-5 所示。

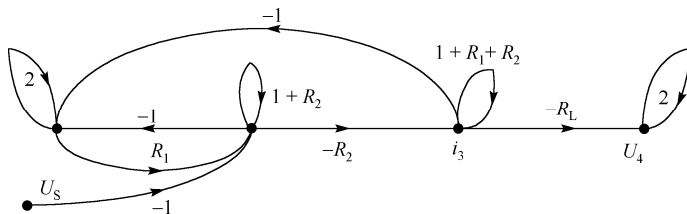


图 6-5 信号流图

## 6.4 电力网络流图的形成法

① 先将模型转化成拓扑图, 每个元件都是一条支路, 并选定一棵树。将电压源全部归到树支中, 电容元件也当成电源支路, 树不足时再用电阻支路补齐, 电流源归到连支中, 剩余的电阻支路也归到连支中。

$$T(\mathbf{u}_S, \mathbf{R})$$

$$L(\mathbf{i}_S, \mathbf{G})$$

② 作出割集 (单树支割集)

$$\mathbf{Q} = \begin{array}{c|cc} \mathbf{u}_S & \mathbf{R} & \mathbf{i}_S & \mathbf{G} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_4 \end{bmatrix} \end{array} \quad (6-3)$$

式中,  $\mathbf{u}_S$  为电压源支路;  $\mathbf{i}_S$  为电流源支路;  $\mathbf{R}$  为树支支路;  $\mathbf{G}$  为连支支路。

由于  $\mathbf{Q}\mathbf{I}_b = \mathbf{0}$ , 则

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{Q}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_T \\ \mathbf{i}_L \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (6-4)$$

所以

$$\mathbf{i}_T = -\mathbf{Q}_L \mathbf{i}_L \quad (6-5)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_{US} \\ \mathbf{i}_{RT} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 & \mathbf{Q}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_S \\ \mathbf{i}_{GL} \end{bmatrix} \quad (6-6)$$

将其展开得:

$$\mathbf{i}_{RT} = -\mathbf{Q}_3 \mathbf{i}_S - \mathbf{Q}_4 \mathbf{i}_{GL} \quad (6-7)$$

从而

$$\mathbf{u}_{RT} = \mathbf{R}_T \mathbf{i}_{RT} = -\mathbf{R}_T \mathbf{Q}_3 \mathbf{i}_S - \mathbf{R}_T \mathbf{Q}_4 \mathbf{i}_{GL} \quad (6-8)$$

又由于  $\mathbf{B}\mathbf{u}_b = \mathbf{0}$ , 则

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_T & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_T \\ \mathbf{u}_L \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (6-9)$$

所以  $\mathbf{B}_T \mathbf{u}_T = -\mathbf{u}_L$ , 即  $\mathbf{u}_L = -\mathbf{B}_T \mathbf{u}_T$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{IS} \\ \mathbf{u}_{GT} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^T & \mathbf{Q}_3^T \\ \mathbf{Q}_2^T & \mathbf{Q}_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_S \\ \mathbf{u}_{RT} \end{bmatrix} \quad (6-10)$$

将其展开得:

$$\mathbf{u}_{GL} = \mathbf{Q}_2^T \mathbf{u}_S + \mathbf{Q}_4^T \mathbf{u}_{RT} \quad (6-11)$$

$$\mathbf{i}_{GL} = \mathbf{Y}_L \mathbf{u}_{GL} = \mathbf{Y}_L \mathbf{Q}_2^T \mathbf{u}_S + \mathbf{Y}_L \mathbf{Q}_4^T \mathbf{u}_{RT} \quad (6-12)$$

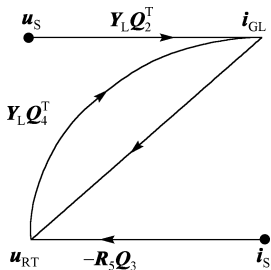


图 6-6 电力网络流图

其电力网络流图如图 6-6 所示。

例 6-3 电路图如图 6-7 所示, 根据电路图画出其拓扑图如图 6-8 所示。

$$\begin{cases} u_2 = (i_1 - i_3)R_2 = i_1 R_2 - i_3 R_2 \\ u_4 = i_3 R_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1 = \frac{u_S - u_2}{R_1} = \frac{u_S}{R_1} - \frac{u_2}{R_1} \\ i_3 = \frac{u_2 - u_4}{R_3} = \frac{u_2}{R_3} - \frac{u_4}{R_3} \end{cases}$$

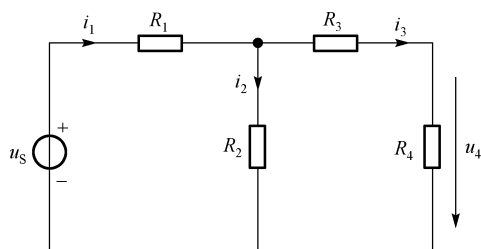


图 6-7 电路图

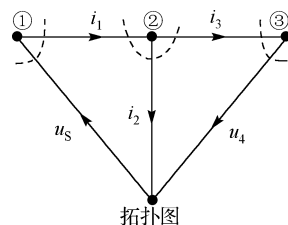


图 6-8 拓扑图

故其电力网络流图如图 6-9 所示。

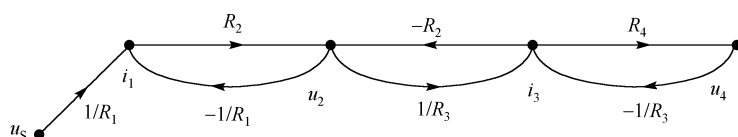


图 6-9 电力网络流图

## 6.5 流图的运算规则

在解代数方程组时，常常用逐步消去一些变量的方法化简方程，最后得到待求变量的解。相应地，在信号流图分析中，可以通过图的变换逐步消去一些节点，最终得到只剩下源节点和汇节点的图，由该图确定所求解的变量值。这就是通过信号流图求解线性方程组的方法之一。以下介绍信号流图变换的几条基本规则。

(1) 叠加性。

如图 6-10 所示，根据叠加性可写出线性代数方程为

$$x_p = t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3 \quad (6-13)$$

(2) 传递性。

根据图 6-11 可得  $x_3 = b x_2$ ，将  $x_2 = a x_1$  代入可得

$$x_3 = b x_2 = a b x_1 \quad (6-14)$$

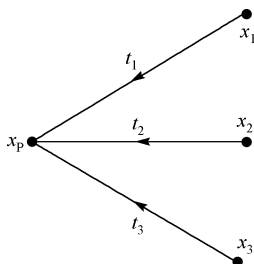


图 6-10 电力网络流图

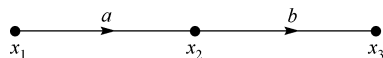


图 6-11 电力网络流图

(3) 消去自环。

根据图 6-12 可知：

$$x_p = t x_p + a_1 x_1 + c_3 x_3 \quad (6-15)$$

$$(1-t)x_p = a_1x_1 + c_3x_3 \quad (6-16)$$

整理得：

$$x_p = \frac{a_1}{1-t}x_1 + \frac{c_3}{1-t}x_3 \quad (6-17)$$

所以要消去自环时，等式左右除以 $(1-t)$ ，则消去自环后的流图如图 6-13 所示。

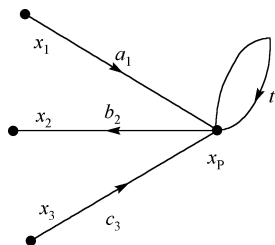


图 6-12 电力网络流图

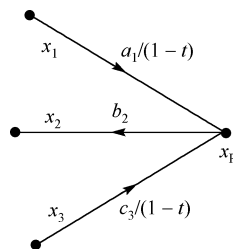


图 6-13 消去自环后的流图

(4) 消去一个节点。

如图 6-14(a)所示，先消去  $x_2$  得图 6-14(b)，当再消去自环时最终流图如图 6-14(c)所示。

先消去  $x_2$ ：

$$x_2 = ax_1 + dx_3 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = bx_2 = abx_1 + bdx_3 \\ x_3 = cx_2 = acx_1 + cdx_3 \end{cases} \quad (6-18)$$

消去自环：

$$\begin{cases} x_1 = abx_1 + bdx_3 \\ x_3 = acx_1 + cdx_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = bd / (1-ab)x_3 \\ x_3 = ac / (1-cd)x_1 \end{cases} \quad (6-19)$$

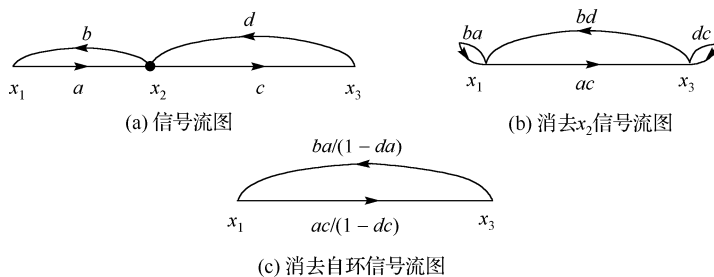


图 6-14 消去一个节点

(5) 如图 6-15(a)所示，消除一个回路。

$$\begin{cases} x_2 = ax_1 + cx_3 \\ x_3 = bx_2 + dx_4 \end{cases} \Rightarrow x_2 = ax_1 + cbx_2 + cdx_4 \quad (6-20)$$

经变形后得图 6-15(b)，

$$x_2 = ax_1 + cbx_2 + cdx_4 \Rightarrow x_2 = \frac{a}{1-bc}x_1 + \frac{cd}{1-bc}x_4 \quad (6-21)$$

最终消去回路得图 6-15(c)



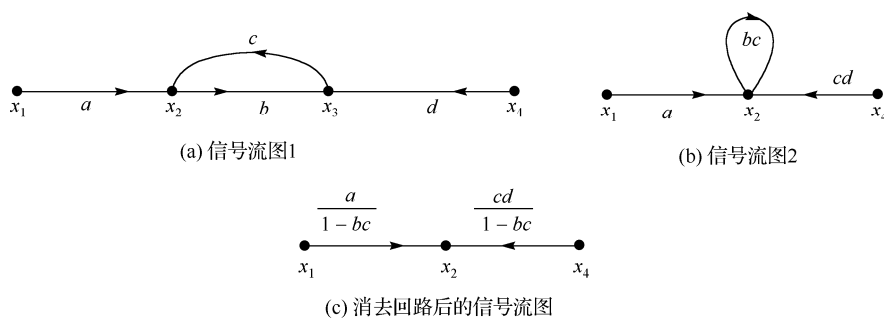


图 6-15 消除一个回路

## 6.6 传输（增益）的求解

Mason 图增益公式（简称 Mason 公式）是求信号流图增益（传输值）的公式，它与克莱姆法则求线性方程组解的方法相当。Mason 公式直接根据信号流图的结构给出传输值的解，应用更加方便。

设  $n$  为电源点数， $\mathbf{x}_s$  为电源点变量  $\mathbf{x}_s = [x_{s1}, x_{s2}, \dots, x_{sn}]^T$ ； $m$  为负荷点数， $\mathbf{x}$  为负荷点变量  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$

对于非源点变量  $\mathbf{x}$ ，它与各个源点变量  $\mathbf{x}_s = [x_{s1}, x_{s2}, \dots, x_{sn}]^T$  之间有下列关系式：

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^s t_{ji} x_{si} \quad (6-22)$$

它对应着线性网络的叠加定理。并且，如同叠加定理那样，对于各个源点至非源点的传输系数  $t_{ji}$ ，可以按照下式确定：

$$t_{ji} = \left. \frac{x_j}{x_{si}} \right|_{x_{s1}, \dots, x_{si-1}, x_{si+1}, \dots, x_{sn} = 0} \quad (6-23)$$

为了求解负荷点变量  $\mathbf{x}$ ，实质上只要分别求出电源点对其的作用再相加。

$$t_{ij} = \frac{x_i(\text{负荷点})}{x_j(\text{电源点})} = \frac{\sum P_k \Delta_k}{\Delta} \quad (6-24)$$

式中， $P_k$  为从电源点  $\mathbf{x}_{si}$  到非源点  $\mathbf{x}_i$  的第  $k$  条前向通路的增益，即沿着该通路上各支路增益的乘积；

$\Delta$  为流图的行列式：

$$\Delta = 1 - \sum L_k^1 + \sum L_k^2 - \sum L_k^3 + \dots + (-1)^n \sum L_k^n \quad (6-25)$$

$L_k^n$ ： $L_k^1$  为第  $k$  个单重有向回路增益，与之对应的  $\sum L_k^1$ ，便是单重有向回路增益的总和； $L_k^2$  为第  $k$  个非切触双重有向回路增益，它由两个不相切触的单重有向回路组成，且是这两个有向回路增益的乘积，与之对应的  $\sum L_k^2$ ，便是双重有向回路增益的总和； $L_k^3$  为第  $k$  个非切触三重有向回路增益，它由三个不相切触的单重有向回路所组成，且是这三个有向回路增益的

乘积, 与之对应的  $\sum L_k^3$ , 便是三重有向回路增益的总和; 对于其余四重  $\sum L_k^4$ 、五重  $\sum L_k^5$  等, 情况类推;

$\Delta_k$  则是对应于  $P_k$ , 却又不与第  $k$  条前向通路相切触的子图行列式, 从概念上讲, 其计算方法与  $\Delta$  的计算方法相同, 只是计算条件不同而已。 $\Delta$  是针对整个图形而言的,  $\Delta_k$  却是针对不与第  $k$  条前向通路相切触的子图而言的。所谓非切触, 就是指它们之间, 没有公共节点, 当然也不会有公共支路。

## 6.7 路径与回路的搜索法

例 6-4 根据图 6-16, 求  $t_{81}$ 。

解:

$$(1) \Delta = 1 - (bl + ef + ij) + (blef + blif + efij) - blefij$$

$$(2) \textcircled{1} x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_8$$

$$P_1 = abc, \Delta_1 = 1 - (ef + ij) + efij$$

$$\textcircled{2} x_1 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow x_8$$

$$P_2 = dfg, \Delta_2 = 1 - (bl + ij) + blij$$

$$\textcircled{3} x_1 \rightarrow x_6 \rightarrow x_7 \rightarrow x_8$$

$$P_3 = hjk, \Delta_2 = 1 - (bl + ef) + blef$$

$$(3) t_{81} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3}{\Delta}$$

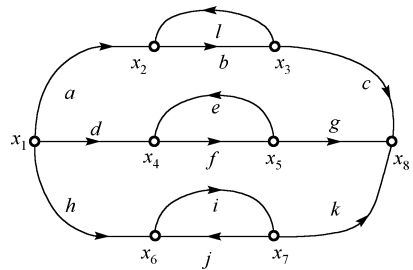


图 6-16 电力网等效电路

例 6-5 某电力网如图 6-17 所示, 电源采用独立电流源表示, 求负载功率。

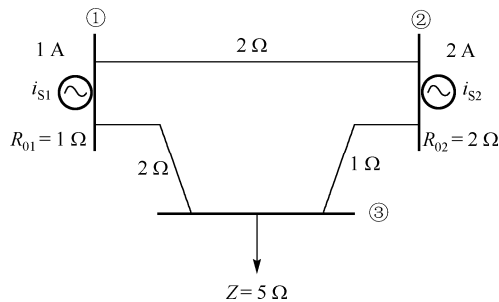


图 6-17 电力网

首先, 作出该电力网络的等效电路图和拓扑图, 分别如图 6-18(a)(b)所示。(如图中实线:  $y_3$ 、 $y_4$ 、 $y_5$  分别表示图的树支)。

图中,  $i_{s1}=1A$ ,  $i_{s2}=2A$ ,  $y_1=0.5S$ ,  $y_2=1S$ ,  $y_6=0.5S$ , 且  $y_3, y_5$  为内阻,  $R_3=1\Omega$ ,  $R_4=5\Omega$ ,  $R_5=2\Omega$ 。

可得:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

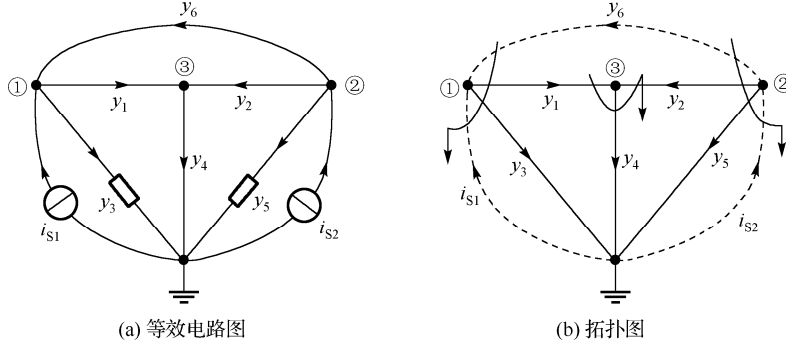


图 6-18

由于

$$\mathbf{u}_T = -\mathbf{R}_T \mathbf{Q}_3 \mathbf{i}_S - \mathbf{R}_T \mathbf{Q}_4 \mathbf{i}_L$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -R_3 & 0 & 0 \\ 0 & -R_4 & 0 \\ 0 & 0 & -R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S1} \\ i_{S2} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -R_3 & 0 & 0 \\ 0 & -R_4 & 0 \\ 0 & 0 & -R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S1} \\ i_{S2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_3 & 0 & -R_3 \\ -R_4 & -R_4 & 0 \\ 0 & R_5 & R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} i_{S1} R_3 + i_6 R_3 - i_1 R_3 \\ i_1 R_4 + i_2 R_4 \\ i_{S2} R_5 - i_2 R_5 - i_6 R_5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由于

$$\mathbf{i}_L = \mathbf{Y}_L \mathbf{Q}_2^T \mathbf{u}_S + \mathbf{Y}_L \mathbf{Q}_4^T \mathbf{u}_T$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_1 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_S + \begin{bmatrix} y_1 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y_1 & -y_1 & 0 \\ 0 & -y_2 & y_2 \\ -y_6 & 0 & y_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 u_3 - y_1 u_4 \\ -y_2 u_4 + y_2 u_5 \\ -y_6 u_3 + y_6 u_5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (u_3 - u_4) y_1 \\ (u_5 - u_4) y_2 \\ (u_5 - u_3) y_6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

根据上两式作出该系统的流图，如图 6-19 所示。

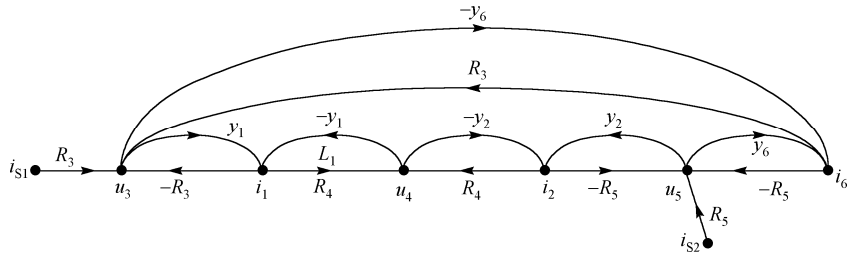


图 6-19 信号流图

$$\begin{aligned}
 \Delta &= 1 + (y_1 R_3 + y_1 R_4 + y_2 R_4 + y_2 R_5 + y_6 R_5 \\
 &\quad + y_6 R_3 - y_1 R_3 y_2 R_4 y_6 R_5 - y_6 R_5 y_2 R_4 y_1 R_3) \\
 &\quad + (y_1 R_3 y_2 R_4 + y_1 R_3 y_2 R_5 + y_1 R_3 y_6 R_5 + y_1 R_4 y_2 R_5 + y_1 R_4 y_6 R_5 \\
 &\quad + y_2 R_4 y_6 R_5 + y_6 R_3 y_1 R_4 + y_6 R_3 y_2 R_4 + y_6 R_3 y_2 R_5) \\
 &\quad + (y_6 R_3 y_1 R_4 y_2 R_5 + y_1 R_3 y_2 R_4 y_6 R_5) \\
 &= 1 + 6.5 + 21.25 + 5 = 33.75
 \end{aligned}$$

(1) 电源  $i_{S1}$  到  $u_4$  :

$$\textcircled{1} i_{S1} \rightarrow u_3 \rightarrow i_1 \rightarrow u_4$$

$$P_1 = R_3 y_1 R_4 = 2.5, \quad \Delta_1 = 1 + (y_2 R_5 + y_6 R_5) = 4$$

$$\textcircled{2} i_{S1} \rightarrow u_3 \rightarrow i_6 \rightarrow u_5 \rightarrow u_2 \rightarrow u_4$$

$$P_2 = R_3 y_6 R_5 y_2 R_4 = 5, \quad \Delta_2 = 1$$

(2) 电源  $i_{S2}$  到  $u_3$  :

$$\textcircled{1} i_{S2} \rightarrow u_5 \rightarrow i_2 \rightarrow u_4$$

$$P_1 = R_5 y_2 R_4 = 10, \quad \Delta_1 = 1 + (y_6 R_3 + y_1 R_3) = 2$$

$$\textcircled{2} i_{S1} \rightarrow u_5 \rightarrow i_6 \rightarrow u_3 \rightarrow i_1 \rightarrow u_4$$

$$P_2 = R_5 y_6 R_3 y_1 R_4 = 2.5, \quad \Delta_2 = 1$$

$$u_4 = \frac{2.5 \times 4 + 5 \times 1}{33.75} \times 1 + \frac{10 \times 2 + 2.5 \times 1}{33.75} \times 2 = 1.778$$

$$P_4 = \frac{u_4^2}{R_4} = \frac{1.778^2}{5} = 0.632 \text{ W}$$

## 6.8 封闭信号流图法

为使式 (6-24) 中的分子  $\sum P_k \Delta_k$  与分母  $\Delta$  的计算更趋于统一, G. W. Zobrist 提出一种封闭信号流图法。其意图是只要求出封闭信号流图的行列式  $\Delta_c$ , 便可以在该等式中区分出式 (6-24) 中的分子和分母。

这种办法是从节点变量  $x_j$  到  $x_{Si}$  增添一个权值为  $-F$  的反馈支路, 构成封闭信号流图。然

后, 如同前述求  $\Delta$  的方法, 写出此图的  $\Delta_c$  :

$$\Delta_c = \Delta + F \sum_k P_k \Delta_k \quad (6-26)$$

实际上, 依照式 (6-24) 便有

$$x_{ji} = t_{ji} x_{si} = \frac{\sum_k P_k \Delta_k}{\Delta} x_{si} \quad (6-27)$$

由于增添了一个权值为  $-F$  的反馈支路, 将有  $x_{si} = -F x_{ji}$ , 代入前式可得

$$\Delta x_{ji} = \sum_k P_k \Delta_k x_{si} = \sum_k P_k \Delta_k (-F x_{ji}) \quad (6-28)$$

即

$$\left( \Delta + F \sum_k P_k \Delta_k \right) x_{ji} = 0 \quad (6-29)$$

可见, 这时信号流图的行列式  $\Delta_c$  的值如同式 (6-26) 所列。换句话说, 在列写出  $\Delta_c$  的计算表达式后, 只要将含有  $F$  的项归纳整理成式 (6-26) 等式右边的第二项, 其余部分便组成  $\Delta$ 。被归纳的第二项, 剔除  $F$  后, 便是  $\sum_k P_k \Delta_k$ 。

**例 6-6** 求图 6-20 所示信号流图的传输系数  $t = x_3/x_s$ 。

(1) 先用 Mason 公式求解。

$$\Delta = 1 - (e + cd)$$

$$P_1 = af, \Delta_1 = 1 - e; \quad P_2 = acg, \Delta_2 = 1;$$

$$P_3 = bdf, \Delta_3 = 1; \quad P_4 = bg, \Delta_4 = 1$$

故

$$t = \frac{x_3}{x_s} = \frac{af(1-e) + bg + acg + bdf}{1 - e - cd}$$

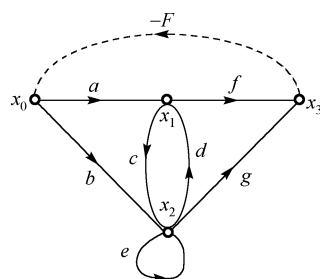


图 6-20 信号流图

(2) 用封闭信号流图法求解。

图 6-20 中所添加的虚线为权值是  $-F$  的反馈支路。

这样

$$L_1^{(1)} = e, \quad L_2^{(1)} = cd, \quad L_3^{(1)} = -Faf,$$

$$L_4^{(1)} = -Fbg, \quad L_5^{(1)} = -Facg, \quad L_1^{(1)} = -Fbdf$$

即

$$\sum L_k^{(1)} = e + cd - F(af + bg + acg + bdf)$$

及

$$\sum L_k^{(2)} = \sum L_k^{(1)} = -Fafe$$

故

$$\Delta_c = 1 - [e + cd - F(af + bg + acg + bdf)] + (-Fafe)$$

$$\Delta = 1 - e - cd, \quad \sum_k P_k \Delta_k = af + bg + acg + bdf - afe$$

即

$$t = \frac{x_3}{x_s} = \frac{\sum_k P_k \Delta_k}{\Delta} = \frac{af(1-e) + bg + abg + bdf}{1-e-cd}$$

结果同前。

顺便指出：运用 Mason 公式或封闭信号流图法，亦可方便求出图中任意两个非源点变量间的传输信号比。即

$$\frac{x_j}{x_k} = \frac{x_j/x_s}{x_k/x_s} = \frac{t_{js}}{t_{ks}} = \frac{\left(\frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \Delta_k\right)_{js}}{\left(\frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \Delta_k\right)_{ks}} = \frac{\left(\sum_k P_k \Delta_k\right)_{js}}{\left(\sum_k P_k \Delta_k\right)_{ks}} \quad (6-30)$$

式中，足标  $js$  和  $ks$  分别是指信号从  $x_s$  传至  $x_j$  和  $x_k$  时各自计算的结果。

## 6.9 Coates 流图及其应用

通常，线性系统方程总是以下列矩阵方程的形式出现

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}u \quad (6-31)$$

式中， $u$  为信号源，它是一个标量； $\mathbf{A}$  为  $n$  阶系数方阵； $\mathbf{X}$  为待求的  $n$  行列向量； $\mathbf{B}$  为  $n$  行系数列向量。

Mason 公式通常是将等式移项后并加上  $\mathbf{X}$  即得

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{X} - \mathbf{B}u \quad (6-32)$$

进而可以把它写成

$$\mathbf{X} = [\mathbf{I} + \mathbf{A} - \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ u \end{bmatrix} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ u \end{bmatrix} \quad (6-33)$$

进而对信号流图进行求解的。其特点是不论代数方程还是信号流图均反映出因果关系明确。式中的每个变量是

$$x_k = \sum_{j=1}^n C_{kj} \cdot x_j + C_{k,n+1} \cdot u \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (6-34)$$

因此，反映在信号流图中，从信号源起，经过信号传递支路和中间节点变量，直至输出变量止，各个变量之间的相互关系直观明了，但仅能针对传递函数逐个地求解。

### 6.9.1 Coates 流图

Coates 流图与信号流图不同，其基本出发点就是为了求解代数方程。尽管它的节点仍然代表变量，其支路也依然具有方向及表示传输系数的权值，但它所对应的代数方程，从形式上讲，与前述信号流图所对应的代数方程有所不同。故不再称为信号流图，而只称为流图。它依然以式 (6-31) 为前提。将它改写为如下形式：

$$\mathbf{AX} - \mathbf{Bu} = 0 \quad (6-35)$$

即矩阵方程中的每一行是

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} \cdot x_j - b_k \cdot u = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (6-36)$$

然后类似于描绘信号流图那样，以此绘出相应的流图，便称为 Coates 流图。

也正因为式 (6-35) 与前面所述的式 (6-33) 不尽相同，所以，依照这两个方程式绘制出来的流图也必然有所不同，图形中所包含的概念也不一样。

以二阶线性方程为例：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u = 0 \quad (6-37)$$

其 Coates 流图如图 6-21 所示，就是说，对于任何一个待求节点变量而言，其输入的增益信号总和为零，这一点与 Mason 信号流图大不相同。

对于同一方程，如欲作出 Mason 信号流图，它将对应于下式：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1+a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \quad (6-38)$$

此时的信号流图便如图 6-22 所示。其涵义是：对于任何一个待求节点变量而言，其输入的增益信号总和，等于该变量节点所能输出的信号。

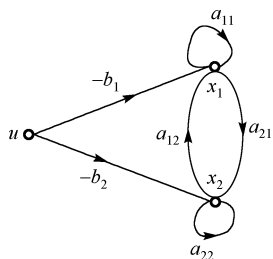


图 6-21 二阶方程的 Coates 流图

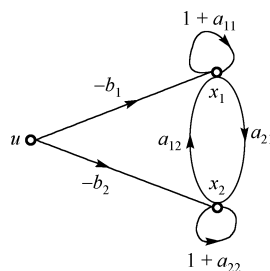


图 6-22 二阶方程的 Mason 流图

以上所述，就是两种流图的根本差别。从作图方法看，两者的作法都一样，而涵义却大不相同。

### 6.9.2 Coates 公式

针对式 (6-35)，这时矩阵代数方程的解为

$$X = A^{-1}Bu = \frac{\text{adj}A}{\det A}Bu \quad (6-39)$$

式中,  $\det A = \Delta$ , 为系数矩阵  $A$  的行列式;  $\text{adj}A$  则是矩阵  $A$  的伴随矩阵, 即

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{j1} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1k} & \cdots & \Delta_{jk} & \cdots & \Delta_{nk} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \cdots & \Delta_{jn} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \quad (6-40)$$

其中,  $\Delta_{jk}$  则正是矩阵  $A$  中元素  $a_{jk}$  的代数余子式。故结合式 (6-17) 便有

$$t_{ks} = \frac{x_k}{u} = \frac{\sum_{j=1}^n b_j \Delta_{jk}}{\Delta} \quad (6-41)$$

针对行列式  $\Delta$  及代数余子式  $\Delta_{jk}$  的运算, C.L.Coate 经过综合归纳, 提出运用 Coates 流图去求解  $\Delta$  和  $\Delta_{jk}$  的基本方法。

为了说明如何运用 Coates 流图去获得式 (6-41) 的解, 在此先介绍一些图形符号和术语的涵义。将对应于方程式 (6-35) 的 Coates 流图用符号  $G_C(c)$  表示; 而把源点  $u$  以及从它连通到各个变量节点的支路删除后的子图, 即非源点组成的流图用符号  $G_C(A)$  表示, 并称之为冷图; 在冷图中再挑出这样一些子图, 这些子图均包含图  $G_C(A)$  中的全部变量节点, 但每个变量节点又只有一条引入支路和一条引出支路, 故称之为 1-因子图。其中, 对于自环, 应算作是引入支路和引出支路兼有的回路。因此, 在作 1-因子图时, 如果某个节点配有自环, 则该变量节点就不应再有其他支路与它相连, 这时的 1-因子图将为分离图。而不含自环的 1-因子图则必然是有向回路, 它由连通各个变量节点的引入支路和引出支路构成。

这样, 对应于式 (6-41), 针对图  $G_C(A)$  便可运用下述 Coates 公式去进行计算求解。

即

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^n \sum_p (-1)^{L_p} h_p \quad (6-42)$$

式中,  $n$  为方程的阶数, 它同时也就是待求变量的个数;  $h_p$  为第  $p$  组的 1-因子图的增益;  $L_p$  为第  $p$  组的 1-因子图中的回路数。

同理

$$\Delta_{jk} = \det A_a = (\text{第 } j \text{ 行}) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^n \sum_p (-1)^{L_p} h_p \quad (6-43)$$

(第  $k$  列)



式中的行列式,是令 $\Delta$ 的行列式中的第 $j$ 行和第 $k$ 列元素,除了使 $a_{jk}=1$ 外,其余皆为零构成。因此,式(6-43)与式(6-42)完全相仿,计算方法亦完全相同。只式(6-43)对应的流图与式(6-42)对应的流图有所不同。式(6-42)对应于图 $G_C(A)$ ,而式(6-43)则对应于图 $G_C(A_a)$ 。后者只是前者的一个子图,是在图 $G_C(A)$ 中保留对应于元素 $a_{jk}$ 的支路,且令 $a_{jk}=1$ 的条件下,删去对应于第 $j$ 行和第 $k$ 列其余元素所得的子图。而 $h_a$ 正是针对这个子图的第 $a$ 组的1-因子图的增益; $L_a$ 则是这个子图中的回路数。

以前述二阶线性代数方程为例,对照前述,其图 $G_C(c)$ 、图 $G_C(A)$ 及其1-因子图和图 $G_C(A_a)$ 及其1-因子图,分别如图6-23(a)、(b)、(c)、(d)及(e)、(f)、(g)、(h)所示。

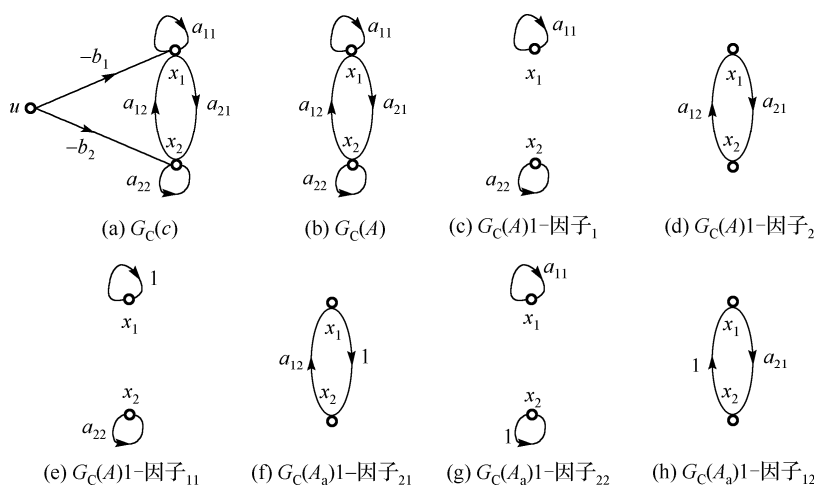


图 6-23 二阶线性方程所对应的 $G_C(c)$ 、 $G_C(A)$ 及其1-因子图和 $G_C(A_a)$ 及其1-因子图

故有

$$\begin{aligned}\Delta &= (-1)^n \sum_p (-1)^{L_p} h_p = (-1)^2 [(-1)^1 a_{11} a_{22} + (-1)^1 a_{12} a_{21}] \\ &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}\Delta_{11} &= (-1)^n \sum_a (-1)^{L_a} h_a = (-1)^2 [(-1)^2 a_{22}] = a_{22} \\ \Delta_{12} &= (-1)^2 [(-1)^1 \cdot a_{21}] = -a_{21} \\ \Delta_{21} &= (-1)^2 [(-1)^1 a_{12} \cdot 1] = -a_{12} \\ \Delta_{22} &= (-1)^2 [(-1)^1 a_{11} \cdot 1] = a_{11}\end{aligned}$$

可得

$$\frac{x_1}{u} = \frac{\sum_{j=1}^2 b_j \Delta_{j1}}{\Delta} = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad \frac{x_2}{u} = \frac{\sum_{j=1}^2 b_j \Delta_{j2}}{\Delta} = \frac{-b_1 a_{21} + b_2 a_{11}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

再以三阶线性代数方程为例，其图  $G_C(c)$ 、图  $G_C(A)$  及其 1-因子图分别如图 6-24 所示。故有

$$\begin{aligned}\Delta &= (-1)^3 [(-1)^3 a_{11} a_{22} a_{33} + (-1)^2 a_{11} a_{23} a_{32} + (-1)^2 a_{22} a_{13} a_{31} \\ &\quad + (-1)^2 a_{33} a_{12} a_{21} + (-1)^1 a_{12} a_{23} a_{31} + (-1)^1 a_{21} a_{32} a_{13}] \\ &= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{21} a_{32} a_{13} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{22} a_{13} a_{31} - a_{33} a_{12} a_{21}\end{aligned}$$

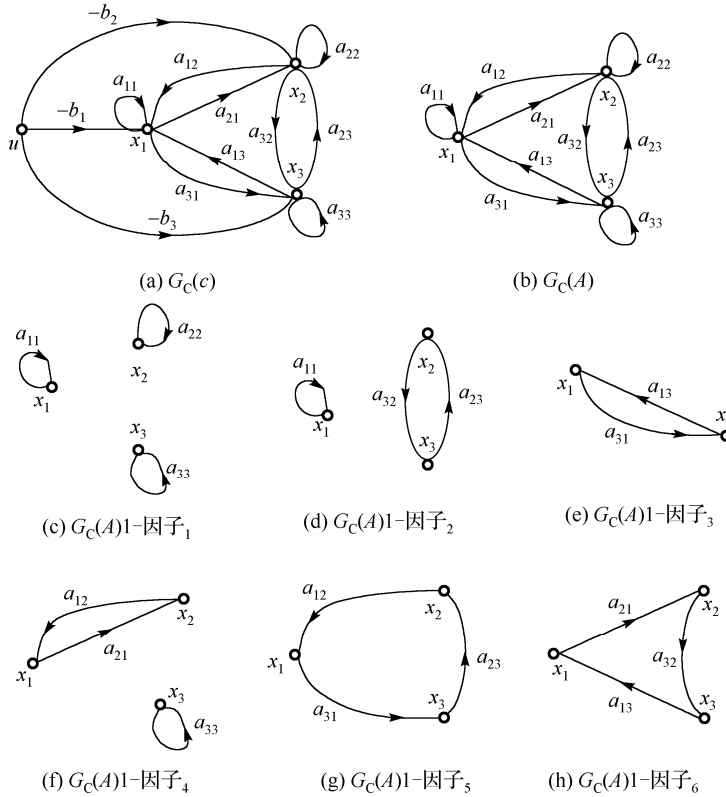


图 6-24 三阶线性方程所对应的  $G_C(c)$ 、 $G_C(A)$  及其 1-因子图

同理，借助图  $G_C(A)$  1-因子图，便可写出：

$$\Delta_{11} = (-1)^3 [(-1)^3 \cdot 1 \cdot a_{22} a_{33} + (-1)^2 \cdot 1 \cdot a_{23} a_{32}] = a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}$$

$$\Delta_{21} = (-1)^3 [(-1)^2 \cdot 1 \cdot a_{12} a_{33} + (-1)^1 \cdot 1 \cdot a_{32} a_{13}] = a_{13} a_{32} - a_{12} a_{33}$$

$$\Delta_{31} = (-1)^3 [(-1)^2 \cdot 1 \cdot a_{13} a_{22} + (-1)^1 \cdot 1 \cdot a_{12} a_{23}] = a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}$$

$$\frac{x_1}{u} = \frac{1}{\Delta} (b_1 \Delta_{11} + b_2 \Delta_{21} + b_3 \Delta_{31})$$

$$\Delta_{22} = (-1)^3 [(-1)^3 \cdot 1 \cdot a_{11} a_{33} + (-1)^2 \cdot 1 \cdot a_{13} a_{31}] = a_{11} a_{33} - a_{13} a_{31}$$

$$\Delta_{12} = (-1)^3 [(-1)^2 \cdot 1 \cdot a_{21} a_{33} + (-1)^1 \cdot 1 \cdot a_{23} a_{31}] = a_{23} a_{31} - a_{21} a_{33}$$

$$\Delta_{32} = (-1)^3 [(-1)^2 \cdot 1 \cdot a_{23} a_{11} + (-1)^1 \cdot 1 \cdot a_{13} a_{21}] = a_{13} a_{21} - a_{23} a_{11}$$

$$\frac{x_2}{u} = \frac{1}{\Delta} (b_1 \Delta_{12} + b_2 \Delta_{22} + b_3 \Delta_{32})$$

$$\Delta_{33} = (-1)^3 [(-1)^3 \cdot 1 \cdot a_{11} a_{22} + (-1)^2 \cdot 1 \cdot a_{12} a_{21}] = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$\Delta_{13} = (-1)^3 [(-1)^2 \cdot 1 \cdot a_{31} a_{22} + (-1)^1 \cdot 1 \cdot a_{21} a_{32}] = a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22}$$

$$\Delta_{23} = (-1)^3 [(-1)^2 \cdot 1 \cdot a_{32} a_{11} + (-1)^1 \cdot 1 \cdot a_{12} a_{31}] = a_{12} a_{31} - a_{32} a_{11}$$

$$\frac{x_3}{u} = \frac{1}{\Delta} (b_1 \Delta_{13} + b_2 \Delta_{23} + b_3 \Delta_{33})$$

# 电力网络的状态方程

研究系统方法的发展如下:

单输入-单输出分析法: 系统用一个  $n$  阶常微分方程来描述。

多输入-多输出分析法: 系统用  $n$  个联立的一阶微分方程组来描述。

状态变量分析法: 利用矩阵、线性代数等数学工具对系统进行研究分析。

## 7.1 状态变量法的基本概念

动力学的状态, 是指物质运动时的基本特征和基本行为。对质点来说, 质点的运动状态通常通过质点的位置及它的速度来表示。已知质点的位置及速度, 就可以知道其运动方向及变化趋势, 就可以知道它在任一时刻的势能和动能, 从而把握质点的运动特征。设在时刻  $t$  时, 质点只沿一维坐标方向运动, 其位置为  $x$ , 质点的速度  $v$  为位置  $x$  和时刻  $t$  的函数, 即有

$$v = \frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (7-1)$$

上式就是关于质点运动的状态方程, 对上述概念进一步扩展, 形成关于系统状态变量法的一般概念。下面, 我们仅以网络为对象, 讨论这些概念。

### 7.1.1 状态、状态变量、状态方程

#### 定义 1 状态

一个网络在  $t=t_0$  时的状态, 是一组恰当的代表所需信息量的数值  $x_1(t_0)$ ,  $x_2(t_0)$ ,  $\dots$ ,  $x_n(t_0)$ 。利用这组数值, 连同网络的模型和  $t=t_0$  时的输入激励函数, 足以唯一确定  $t \geq t_0$  时, 网络中任意一个电压、电流在  $t$  时刻的值。

这组信息是必要的、充分的一组信息。所谓必要是指这组信息彼此之间是线性无关的; 所谓充分是指这组信息一旦已知, 连同网络的模型及激励函数, 足以确定网络在  $t \geq t_0$  时的全部行为。

一个系统如果可以用一个  $n$  阶常微分方程来描述, 则给出  $n$  个独立的  $t=t_0$  时的初始条件, 即可决定系统在  $t \geq t_0$  时的全部行为。因此, 不难想象, 网络在  $t=t_0$  时的一组完备的初始条件, 可构成网络在  $t=t_0$  时的一组状态。

#### 定义 2 状态变量

若对所有的  $t_0$  及所有  $t \geq t_0$ , 存在一组可以确定网络动态运动行为的一组线性无关、最少的一组变量, 它们在  $t$  时刻的值, 就是网络在  $t$  时刻的一组状态, 则称这组变量为网络的一组状态变量。

**定义3 状态向量、状态空间、状态轨迹**

如果一个向量的各个分量对应网络的一组状态变量，则这个向量称为状态向量。若一个空间的各维坐标与某一状态向量的各个分量对应，则此空间称为与上述状态向量相对应的状态空间。状态向量矢端随时间变化而在状态空间所描出的轨迹称作状态轨迹。

**定义4 状态方程**

关于状态变量的联立的一阶微分方程组称作状态方程。

应该注意，状态方程中，每一式的左端要求表示为状态变量的一阶导数，而右端要表示为状态变量及输入的函数。

后面将要证明，对线性时不变（系统的参数不随时间变化），其状态方程的标准形式为

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U} \quad (7-2)$$

式中， $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  为  $n$  维状态变量向量， $\mathbf{U} = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$  为  $m$  维输入向量， $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$  为常数矩阵， $\mathbf{B} = (b_{ij})_{n \times m}$  为常数矩阵。

对非线性网络，状态方程的标准形式为

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \quad (7-3)$$

式中， $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$  为  $n$  维向量函数。

**7.1.2 网络复杂性的阶数**

**代数方程/静态方程：**网络的支路均由电阻元件组成，由元件特性列出的方程。

**动态方程：**电路中存在电容及电感元件，则由元件的  $u-i$  关系将导出对时间的微分关系，列出的电路方程将为含有微分-积分方程及代数方程联立的一组方程。

**网络复杂性的阶数：**网络的最大独立、充分的动态变量。

**定义5 网络的复杂性阶数**

一组能够描述网络的动态特性的恰当的（独立而又充分的）状态变量的个数，或能够完全确定网络动态响应的一组恰当的独立初始条件的个数，或能够完全描述网络动态响应的一组恰当的一阶微分方程的个数称为网络复杂性的阶数。

一般来说，如果所有的储能元件的初始值相互之间是线性无关的，则这组初值就可以构成一组恰当的独立初始条件。因此，网络复杂性的阶数不可能超过网络中储能元件的个数。即

$$n \leq b_{LC} \quad (7-4)$$

式中， $n$  为网络复杂性的阶数， $b_{LC}$  为网络中储能元件的个数。

**定义6 纯电容回路与纯电感割集**

某网络的某一回路仅由电容元件及某些可能的独立电压源所构成，则此回路称为纯电容回路（记为  $C-E_i$  回路）；若网络的某一割集仅由电感元件及某些可能的独立电流源所构成，则此割集称为纯电感割集（记为  $L-J_i$  割集）。

当网络中不含有受控源时，网络的复杂性阶数，可以通过系统的方法加以确定。首先考虑图 7-1 所示网络。

图中有 6 个储能元件, 不难看出,  $C_3$ 、 $C_4$  和  $u_S$  组成一个  $C-E_i$  回路,  $L_5$ 、 $L_6$  和  $L_7$  组成一个  $L-J_i$  割集。则电容电压和电感电流相互之间存在下列约束关系:

$$u_3 + u_4 = u_S \quad (7-5)$$

$$i_5 + i_6 + i_7 = 0 \quad (7-6)$$

式 (7-5) 说明,  $u_3$  和  $u_4$  之间线性相关, 故独立的初始条件数目将减少一个。同样, 式 (7-6) 说明  $i_5$ ,  $i_6$ ,  $i_7$  之间是线性相关的, 故它们中间只有两个电流是独立的。因此, 该网络的复杂性阶数为  $6-2=4$ 。

有时, 网络中可能不止一个回路  $C-E_i$  ( $L-J_i$  割集), 如图 7-2 所示。

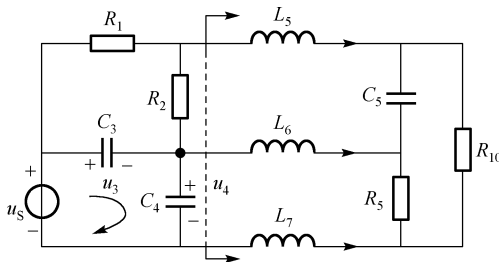


图 7-1 电力网络图 (1)

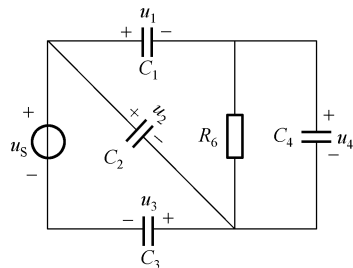


图 7-2 电力网络图 (2)

在图 7-2 中, 共存在 3 个  $C-E_i$  回路。其中各电容电压之间存在下列约束关系:

$$u_1 + u_4 - u_2 = 0 \quad (7-7)$$

$$u_2 + u_3 = u_S \quad (7-8)$$

$$u_1 + u_4 + u_3 = u_S \quad (7-9)$$

但式 (7-9) 可由式 (7-7) 和 (7-8) 相加得到, 故上述三式只有两个是独立的, 这说明 4 个电容电压存在两个独立的线性关系。注意到图 7-2 含有两个独立的  $C-E_i$  回路, 因此, 该网络中独立的电容电压数等于电容元件的个数减去独立的  $C-E_i$  回路的个数。

同理, 若网络中含有若干  $L-J_i$  割集时, 独立的电感电流的数目等于电感元件的个数减去独立的  $L-J_i$  割集的个数。

设该网络的储能元件的总数为  $b_{LC}$ , 网络中独立的  $C-E_i$  回路数为  $n_C$ , 独立的  $L-J_i$  割集数为  $n_L$ , 则网络的复杂性阶数  $n$  由下式确定:

$$n = b_{LC} - n_C - n_L \quad (7-10)$$

对于简单网络, 可以通过视察法来找出独立的  $C-E_i$  回路和独立的  $L-J_i$  割集, 但是对于较复杂的网络, 要直接判断独立的  $C-E_i$  回路和独立的  $L-J_i$  割集也并非易事。下面介绍一种用拓扑方法决定独立的  $C-E_i$  回路和独立的  $L-J_i$  割集的系统步骤。

① 用开路方法确定独立的  $C-E_i$  回路数为  $n_C$ 。

令  $R$ 、 $L$ 、 $C$  网络为  $N$ , 将  $N$  网络中所有的电阻、电感、独立电流源开路, 得到一个子网络  $N_C$ 。显然, 上述处理过程不会影响  $n_C$  的数目。在  $N_C$  中任选一树  $T_C$ , 则  $N_C$  中的单连支回路是  $N_C$  中最大线性独立的  $C-E_i$  回路, 故  $n_C$  等于  $N_C$  中的连支数。

② 用短路方法确定独立的  $L-J_i$  割集数  $n_L$ 。

将  $N$  中所有的电阻、电容、独立电压源短路, 得到一个子网络  $N_L$ 。显然, 上述处理过程也不会影响  $n_L$  的数目。在  $N_L$  中任选一树  $T_L$ , 则  $N_L$  中的独立的割集数应等于  $T_L$  的树支数, 故  $n_L$  等于  $N_L$  中  $T_L$  的树支数。

在用上述方法求  $n_C$  时, 有时所得的子网络  $N_C$  可能是不连通的, 这时要选出  $N_C$  的一个树, 然后求出对应这个树的连支数总和就是  $n_C$  的个数。

### 例 7-1 网络复杂的阶数。

网络如图 7-3(a) 所示, 现确定该网络复杂性的阶数。首先, 将  $R$ 、 $L$ 、 $i_S$  开路, 得到子网络  $N_C$  如图 7-3(b) 所示, 由  $N_C$  可确定其独立回路数  $n_C = 3$ , 再将网络  $N$  中的  $R$ 、 $C$ 、 $u_S$  短路, 得到子网络如图 7-3(c) 所示, 由  $N_L$  可确定其独立割集数  $n_L = 3$ , 储能元件的总数  $b_{LC} = 14$ , 故有

$$n = 14 - 3 - 3 = 8$$

网络复杂性的阶数为 8。

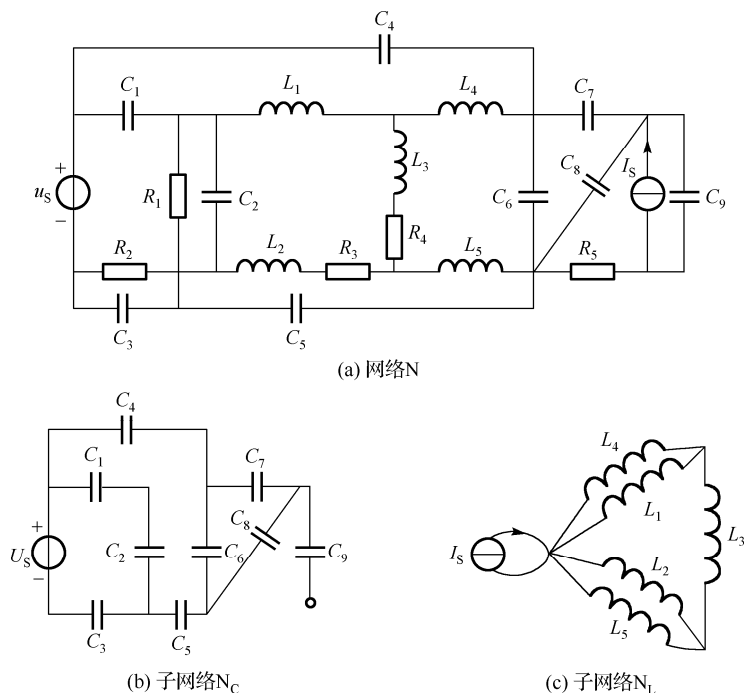


图 7-3 确定网络复杂性的阶数

当线性网络中含有受控源等有源元件时, 网络复杂性阶数的确定要复杂得多。虽然  $C-E_i$  回路和  $L-J_i$  割集仍会使电容电压及电感电流之间存在一种线性约束, 但它们不是导致这种约束的唯一条件。因为有受控源, 电容电压及电感电流之间的约束条件关系不能根据网络元件的相互连接情况而决定, 所以无法给出线性有源网络的复杂性阶数的显示公式。复杂性阶数的界限可由下式决定:

$$b_{LC} - n_L - n_C \geq n \geq 0$$

例 7-2 设网络如图 7-4 所示, 由网络可得出:

$$i_C - \beta i_C = -\frac{u_C}{R_2} + \frac{u_S - u_C}{R_1}$$

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}$$

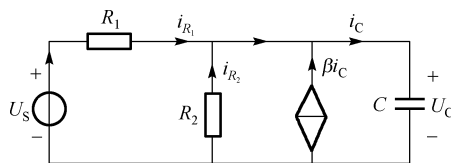


图 7-4 含受控源的网络复杂性阶数

若  $\beta \neq 1$ ，则有

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{-1}{C(1-\beta)} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u_C + \frac{u_s}{R_1 C(1-\beta)}$$

上式正是关于状态变量  $u_C$  的状态方程，所以复杂性阶数为 1。

但是如果  $\beta = 1$ ，则受控源和电容对网络的其他部分相当于开路，这时有

$$u_C = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_s$$

复杂性阶数为 0。

**例 7-3** 如图 7-5 所示网络，有一个仅由电容  $C_1$  和  $C_2$  形成的回路，因此  $u_{C1}$  和  $u_{C2}$  有一个是不独立的。又因  $C_3$  和受控电压源组成了一个回路（称为 C-E<sub>d</sub> 回路），可得出：

$$u_{C3} = r_m i_R = \frac{r_m}{R} (u_{C1} - u_{C3})$$

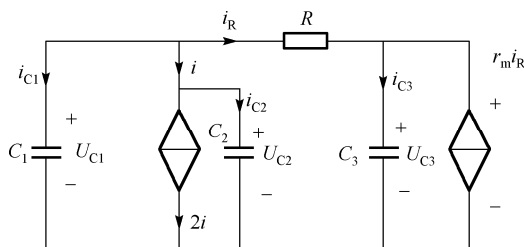


图 7-5 含受控源的网络复杂性阶数与元件参数关系

由此得

$$u_{C3} = \frac{r_m}{R + r_m} u_{C1}$$

因此， $u_{C3}$  和  $u_{C1}$  中也有一个是不独立的，网络的复杂性阶数最多为 1。选  $u_{C1}$  作为状态变量，则可得出

$$\frac{du_{C1}}{dt} = \frac{1}{(C_1 - C_2)(R + r_m)} u_{C1}$$

若  $C_1 \neq C_2$ ，则网络的复杂性阶数为 1，若  $C_1 = C_2$ ，则由图 7-5 可导出



$$i_{C1} = C_1 \frac{du_{C1}}{dt} = C_2 \frac{du_{C2}}{dt} = i_{C2}$$

$$i = i_{C2} + 2i \Rightarrow i = -i_{C2}$$

$$i_{C1} + i + i_R = 0 \Rightarrow i_{C1} - i_{C2} + i_R = 0 \Rightarrow i_R = 0 \Rightarrow r_m i_R = u_{C3} = 0 \Rightarrow u_{C1} = u_{C2} = 0$$

$$u_{C1} = u_{C2} = u_{C3} = 0$$

网络只有零解，复杂性阶数为 0，有本例可以看出电压的约束关系不但与拓扑条件有关，还与元件的参数值有关。

我们看到，由于 C-E<sub>d</sub> 回路，使网络的复杂性阶数降低了一阶。但是，不能由此得出结论：电容元件和受控电压源回路一定会使复杂性阶数降低。下面举个例子说明这一点。

**例 7-4** 考查图 7-6 所示网络，它存在两个 C-E<sub>d</sub> 回路。然而，我们可以得出网络的状态方程为

$$r_m i_1 = u_{C2} \Rightarrow i_1 = \frac{u_{C2}}{r_m}$$

$$i_{C1} = C_1 \frac{du_{C1}}{dt} = i_{R1} - i_1 = -\frac{u_{C1}}{R_1} - \frac{u_{C2}}{r_m}$$

$$\frac{du_{C1}}{dt} = -\frac{1}{R_1 C_1} u_{C1} - \frac{1}{r_m C_1} u_{C2}$$

$$\frac{du_{C2}}{dt} = -\frac{1}{r_m C_2} u_{C1} - \frac{1}{R_2 C_2} u_{C2}$$

网络的复杂性阶数为 2。

从上述例子可以看出，要确定包含受控源的线性网络的复杂性阶数，决不是一个简单的问题。

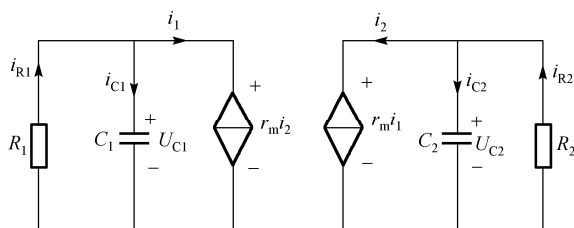


图 7-6 C-E<sub>d</sub> 回路不一定使复杂性阶数降低

## 7.2 线性网络的状态方程

现在我们讨论如何建立状态线性网络的状态方程。在大学本科的电路课中，我们介绍过用直观法建立状态方程的方法。对于不太复杂的网络，只要有可能，人们就尽量用直观法建立状态方程。但对于大规模网络（如几百个节点、上千个元件组成的网络），用直观法建立状态方程就不太现实。为了借助计算机来建立状态方程，我们就必须考虑用拓扑、系统的方法来建立网络的状态方程。

### 7.2.1 编写状态方程的基本考虑

任何电路方程都是在两种约束——拓扑约束 (KCL 和 KVL) 即元件特性约束的前提下推导得到的。为了推导出线性网络的状态方程, 让我们首先考虑建立网络状态方程的一些基本前提。

(1) 当网络不含受控源时, 网络的复杂性阶数为  $n = n_{LC} - n_L - n_C$ 。就是说, 网络中独立的电容电压和独立的电感电流的初值构成了一组恰当的、独立的初始条件, 这就使得我们考虑选独立的电容电压  $u_C$  和独立的电感电流  $i_L$  作为状态变量。

(2) 根据状态方程的定义, 最后推导出的方程应是以电容电压  $u_C$  和电感电流  $i_L$  为变量的联立的一阶微分方程组, 方程的右端仅为状态变量和激励的函数。因此, 我们要在方程的推导过程中想法消去电容电流  $i_C$ 、电感电压  $u_L$ 、电阻电流  $i_R$  和电阻电压  $u_R$  这些非状态变量, 而正是消去这些变量的过程使公式的推导变得很繁杂。

(3) 我们知道, 树支电压是支路电压集合的一组基底电压, 树支电压相互之间是线性独立的, 不可能表示成其他电压的线性组合。而电容是我们最后设法保留的状态变量, 并且作为状态变量的电容电压一定是相互独立的。因此, 我们应尽可能地将电容支路放到树支支路中。同样, 连支路电流是支路电流的一组基底电流, 而电感电流是我们设法保留的状态变量。因此, 我们应尽可能地将电感支路放到连支支路中。

(4) 在建立网络方程时, 我们所用的都是标准的复合支路。而在状态方程中, 为了公式推导方便, 我们规定一个元件作为一条支路, 这样, 独立电压源  $u_S$  和独立电流源  $i_S$  分别各自算一条支路。由于独立电压源  $u_S$  的电压是独立的, 它仅由自己本身的物理特性来决定, 与外电路无关。这样, 独立电压源支路必须选为树支。否则, 若独立电压源支路所在连支在连支中, 则根据 KVL, 连支电压可以表示为支路电压的线性组合。这样, 独立电源的电压就要由其他支的电压来决定了, 而这根本是不可能的。根据完全类似的理由, 独立电流源支路必须被选为连支。此外, 我们不考虑全由独立电压源组成的回路和全由独立电流源组成的割集。因为如果出现了这样的情况, 根据 KVL 和 KCL, 必须有一个独立电压源的电压和一个独立电流源的电流不能任意选择, 要由外电路决定, 否则将出现不相容。物理上, 将以烧坏电源作为代价。

根据上述考虑, 我们定义正常树 (Normal Tree), 如下:

#### 定义 7 正常树

设集中参数连通网络由二端电阻、电感、电容、独立源等元件组成, 则网络对应的图的一个树  $T$  包含全部电压源、尽可能多的电容、尽可能少的电感, 以及某些可能的电阻对应的支路, 而不包含任何电流源对应的支路, 则树  $T$  称为正常树。

关于正常树, 我们需要说明几点:

① 若网络中不存在  $C-E_i$  回路及  $L-J_i$  割集, 该网络称为常态网络。此时网络的复杂性阶数  $n = b_{LC}$ , 即网络中所有的电容电压和电感电流都可作为状态变量。由前面的讨论可知, 这时所有的电容支路均应选为树支, 所有的电感支路均应选为连支。

② 当网络中存在  $C-E_i$  回路及  $L-J_i$  割集时, 由于出现一个  $C-E_i$  回路, 将有一个电容电压不独立, 故必须将一个电容支路放在连支中。否则,  $C-E_i$  回路中所有电容电压均为独立的, 与假定矛盾。设网络独立的  $C-E_i$  回路为  $n_C$  个, 电容支路数为  $b_C$ , 则放在树  $T$  中的电容支路

数将为  $b_c - n_c$  个。同样出现一个  $L-J_i$  割集将有一个电感电流不独立, 故必须将一个电感支路放在树支中。设网络有  $n_L$  个独立的  $L-J_i$  割集, 则放在正常树中的电感支路数为  $n_L$  个。这样, 在正常树  $T$  中的电容支路及对应树  $T$  的连支中的电感支路的总和等于网络复杂性的阶数, 并且树支电容电压及连支电感电流都是独立的变量, 故关于正常树  $T$  的所有树支电容电压和对应树  $T$  所有的连支电感电流组成了一组恰当的状态变量。

列写线性网络的状态方程的步骤如下:

第一步 判断网络复杂性的阶数, 从网络对应的图  $G$  中选出正常树  $T$ , 以树支电容电压与连支电感电流作为状态变量。

第二步 按选定的正常树  $T$  对基本回路写出 KVL 方程, 对根本割集写出 KCL 方程。

第三步 写出支路约束方程 VCR。

第四步 提取关于支路电容电流和支路电感电压的 VCR 方程, 利用 KVL、KCL 及其他无源元件的 VCR 方程, 设法消除上述 VCR 方程中的非状态变量项。

第五步 将方程整理化简, 使之成为标准形式的状态方程。

**例 7-5** 设网络如图 7-7(a)所示, 先用系统步骤列出状态方程。

①  $C_2$ 、 $C_3$ 、 $C_9$  组成一个  $C-E_i$  回路, 故网络复杂性阶数为 3。画出网络对应图如图 7-7(b)所示。选出正常树  $T$  (粗线所示)。其中,  $C_9$  对应支路被选为连支。应选  $u_{C2}$ 、 $u_{C3}$ 、 $i_{L9}$  作为状态变量。

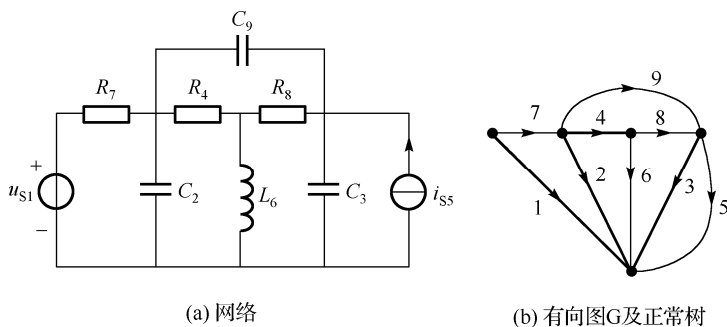


图 7-7 列写状态方程实例

② 按图示的支路编号顺序, 可列出基本割集矩阵和基本回路矩阵为

$$Q = \left[ \begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

$$B = \left[ \begin{array}{cccc|cccccc} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

KCL 方程可以写为  $i_L = -Q_L i_L$ , 即

$$\begin{bmatrix} i_{u_{s1}} \\ i_{C2} \\ i_{C3} \\ i_{R2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s5} \\ i_{L6} \\ i_{R7} \\ i_{R8} \\ i_{C9} \end{bmatrix} \quad (7-11)$$

KVL 方程可以写为  $\mathbf{u}_L = -\mathbf{B}_L \mathbf{u}_L$ ，即

$$\begin{bmatrix} u_{i_{s5}} \\ u_{L6} \\ u_{R7} \\ u_{R8} \\ u_{C9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{s1} \\ u_{C2} \\ u_{C3} \\ u_{R4} \end{bmatrix} \quad (7-12)$$

③ 支路 VCR 方程为:  $i_{C2} = C_2 \frac{du_{C2}}{dt}$ ,  $i_{C3} = C_3 \frac{du_{C3}}{dt}$ ,  $u_{L6} = L_6 \frac{di_{L6}}{dt}$ ,  $i_{C9} = C_9 \frac{du_{C9}}{dt}$ ,  $u_{R_j} = R_j i_{R_j}$

或  $i_{R_j} = \frac{u_{R_j}}{R_j}$  ( $j=4,7,8$ )。

④ 根据 VCR，从式 (7-11) 和式 (7-12) 中提取关于  $i_{C2}$ 、 $i_{C3}$  及  $i_{L6}$  的方程有:

$$\begin{aligned} C_2 \frac{du_{C2}}{dt} &= -i_{L6} + i_{R7} - i_{R8} - i_{C9} \\ C_3 \frac{du_{C3}}{dt} &= -i_{s5} + i_{R8} + i_{C9} \\ L_6 \frac{di_{L6}}{dt} &= u_{C2} - u_{R4} \end{aligned} \quad (7-13)$$

上式中非状态变量为  $i_{R7}$ 、 $i_{R8}$ 、 $i_{C9}$ 、 $u_{R4}$ ，现设法消去这些非状态变量，即设法将非状态变量用状态变量的线性组合表示。对连支电阻电流，我们设法根据 VCR 转变为连支电阻电压，这样，连支电压可表示为树支电压的线性组合，故可设法表示为树支电容电压及独立电压源的线性函数。同样，对树支电阻电压，我们据 VCR 转变为树支电阻电流，然后设法用连支电感电流及独立电流源的线性组合来表示。例如  $i_{R7} = \frac{u_{R7}}{R_7}$ ， $u_{R7}$  为连支电阻电压。从式 (7-12) 提取关于  $u_{R7}$  的方程，可得

$$u_{R7} = u_{s1} - u_{C2}$$

故

$$i_{R7} = \frac{u_{s1}}{R_7} - \frac{u_{C2}}{R_7} \quad (7-14)$$

将  $i_{R7}$  表示为树支电容电压和独立电压源的线性组合。同样，我们可以得出

$$\begin{aligned} i_{R8} &= \frac{u_{C2} - u_{C3} - R_6 i_{L6}}{R_4 + R_8} \\ i_{R4} &= \frac{R_4}{R_4 + R_8} [u_{C2} - u_{C3} + (R_4 + R_8 - R_6) i_{L6}] \\ i_{C9} &= C_9 \frac{d}{dt} (u_{C2} - u_{C3}) \end{aligned} \quad (7-15)$$

将式 (7-14)、式 (7-15) 代入式 (7-13) 可整理为

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{cc|c} C_2 + C_9 & -C_9 & 0 \\ -C_9 & C_3 + C_9 & 0 \\ \hline 0 & 0 & L_6 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \frac{du_{C2}}{dt} \\ \frac{du_{C3}}{dt} \\ \frac{di_{L6}}{dt} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_4 + R_8} & \frac{1}{R_4 + R_8} & \frac{R_8}{R_4 + R_8} - 1 \\ \frac{1}{R_4 + R_8} & -\frac{1}{R_4 + R_8} & -\frac{R_8}{R_4 + R_8} \\ \frac{R_8}{R_4 + R_8} & \frac{R_4}{R_4 + R_8} & R_4 \left( 1 - \frac{R_8}{R_4 + R_8} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C2} \\ u_{C3} \\ i_{L6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_7} & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{S1} \\ i_{S5} \end{bmatrix} \quad (7-16)
 \end{aligned}$$

式 (7-16) 中已经消去了非状态变量, 但还不是标准形式的状态方程。式 (7-16) 左端系数矩阵的逆矩阵为

$$\left[ \begin{array}{cc|c} C_2 + C_9 & -C_9 & 0 \\ -C_9 & C_3 + C_9 & 0 \\ \hline 0 & 0 & L_6 \end{array} \right]^{-1} = \left[ \begin{array}{cc|c} \frac{C_3 + C_9}{C_d} & \frac{C_9}{C_d} & 0 \\ \frac{C_3}{C_d} & \frac{C_2 + C_9}{C_d} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{L_6} \end{array} \right]$$

式中,  $C_d = (C_2 + C_9)(C_3 + C_9) - C_9^2$ 。

将其右乘式 (7-16) 两端就可得到标准形式的状态方程, 具体结果这里就不给出了。

## 7.2.2 线性时不变 R、L、C、M 网络的状态方程

下面我们讨论线性时不变 R、L、C、M 网络的状态方程的系统公式。从实用的角度讲, 仅含 R、L、C、M 的网络的应用范围是非常有限的。但是 R、L、C、M 网络的状态方程总可以得到系统的公式表述, 并且它也是讨论一般线性网络状态方程的基础。

假定网络中所有的 R、L、C、M 元件具有正值, 互感 M 的耦合系数小于 1 (说明此条件的另一种方式是电感矩阵是正定的)。选择网络的一个正常树 T, 然后将支路按下列顺序排列如下:

$$\begin{array}{cc}
 u_{E_T}, C_T, R_T, L_T; i_{J_L}, L_L, R_L, C_L \\
 \text{树支支路} \quad \quad \quad \text{连支支路}
 \end{array}$$

于是, 支路电压向量和支路电流向量可以分块如下:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_b &= (u_{E_T}, u_{C_T}, u_{R_T}, u_{L_T}, u_{J_L}, u_{L_L}, u_{R_L}, u_{C_L})^T \\
 \mathbf{i}_b &= (i_{E_T}, i_{C_T}, i_{R_T}, i_{L_T}, i_{J_L}, i_{L_L}, i_{R_L}, i_{C_L})^T
 \end{aligned} \quad (7-17)$$

网络的拓扑约束为  $\mathbf{Q}\mathbf{i}_b = 0$  及  $\mathbf{B}\mathbf{u}_b = 0$ 。将基本割集矩阵按上述支路划分顺序分块, 则 KCL 可以写为

$$\mathbf{Q}\mathbf{i}_b = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1_{E_T} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} & \mathbf{F}_{13} & \mathbf{F}_{14} \\ 0 & 1_{C_T} & 0 & 0 & \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} & \mathbf{F}_{23} & \mathbf{F}_{24} \\ 0 & 0 & 1_{R_T} & 0 & \mathbf{F}_{31} & \mathbf{F}_{32} & \mathbf{F}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{L_T} & \mathbf{F}_{41} & \mathbf{F}_{42} & 0 & 0 \end{array} \right] \mathbf{i}_b = 0 \quad (7-18)$$

将基本回路矩阵按同样的支路划分顺序分块, 则  $\mathbf{B} = -\mathbf{Q}^T$ , KVL 可以写为

$$\mathbf{B}\mathbf{u}_b = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} -\mathbf{F}_{11}^T & -\mathbf{F}_{21}^T & -\mathbf{F}_{31}^T & -\mathbf{F}_{41}^T & 1_{J_L} & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{F}_{12}^T & -\mathbf{F}_{22}^T & -\mathbf{F}_{32}^T & -\mathbf{F}_{42}^T & 0 & 1_{L_L} & 0 & 0 \\ -\mathbf{F}_{13}^T & -\mathbf{F}_{23}^T & -\mathbf{F}_{33}^T & 0 & 0 & 0 & 1_{R_L} & 0 \\ -\mathbf{F}_{14}^T & -\mathbf{F}_{24}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1_{C_L} \end{array} \right] \mathbf{u}_b = 0 \quad (7-19)$$

上述两式中,  $\mathbf{Q}_L$  和  $\mathbf{B}_T$  中各自出现了 3 个零子矩阵, 这是由于正常树选择的必然结果。我们首先来分析  $\mathbf{B}_T$  中出现零子矩阵的原因。前已说明, 按照正常树的定义, 当网络中出现一个 C-E<sub>i</sub> 回路时, 将会有有一个多余的电容支路选为连支。因此, 与连支电容所关联的基本回路中只能包含电容和电压源支路, 而不能包含电阻或电感支路。于是  $-\mathbf{F}_{34}^T = -\mathbf{F}_{44}^T = 0$ , 同理, 只有当网络中出现一个 L-J<sub>i</sub> 割集时, 才会有一个电感支路被选为树支。因此, 由该电感树支支路所确定的基本割集终不会包含电阻及电容支路。于是  $\mathbf{F}_{43} = \mathbf{F}_{44} = 0$ , 由  $\mathbf{B} = -\mathbf{Q}^T$ , 可推得  $\mathbf{F}_{43} = 0$  及  $-\mathbf{F}_{34}^T = 0$ 。

网络的支路特性方程 VCR 可表示如下:

$$\text{R:} \quad \begin{array}{l} u_{R_T} = \mathbf{R}_T i_{R_T} \quad \text{或} \quad i_{R_T} = \mathbf{G}_T u_{R_T} \\ u_{R_L} = \mathbf{R}_L i_{R_L} \quad \text{或} \quad i_{R_L} = \mathbf{G}_L u_{R_L} \end{array} \quad (7-20)$$

$$\text{C:} \quad \begin{bmatrix} i_{C_T} \\ i_{C_L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_T & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_L \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_{C_T} \\ u_{C_L} \end{bmatrix} \quad (7-21)$$

$$\text{L:} \quad \begin{bmatrix} u_{L_T} \\ u_{L_L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{TT} & \mathbf{L}_{TL} \\ \mathbf{L}_{LT} & \mathbf{L}_{LL} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{L_T} \\ i_{L_L} \end{bmatrix} \quad (7-22)$$

上述各式中,  $\mathbf{R}_T$ 、 $\mathbf{R}_L$ 、 $\mathbf{G}_T$ 、 $\mathbf{G}_L$ 、 $\mathbf{C}_T$ 、 $\mathbf{C}_L$  均为对角阵, 且  $\mathbf{R}_T^{-1} = \mathbf{G}_T$ ,  $\mathbf{R}_L^{-1} = \mathbf{G}_L$ , 电感矩阵是正定的, 且  $\mathbf{L}_{TT}$ 、 $\mathbf{L}_{LL}$  为对称矩阵,  $\mathbf{L}_{TL}^T = \mathbf{L}_{LT}$ 。

线性 R、L、C、M 网络中, 我们选择  $u_{C_T}$  和  $i_{L_L}$  作为状态变量, 于是, 下面我们的任务是以式 (7-18) ~ 式 (7-22) 为出发点, 推导得出以  $u_{C_T}$  和  $i_{L_L}$  作为变量的一阶微分方程组。

我们首先从 VCR 中提取关于  $i_{C_T}$  和  $u_{L_L}$  的表达式, 因为它们正好反映了  $u_{C_T}$  和  $i_{L_L}$  的微分, 由式 (7-21) 及式 (7-22) 有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_T & 0 \\ 0 & \mathbf{L}_{LL} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_{C_T} \\ i_{L_L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{C_T} \\ u_{L_L} - \mathbf{L}_{LT} \frac{d}{dt} i_{L_T} \end{bmatrix} \quad (7-23)$$

式(7-23)的左端已经反映了 $u_{C_T}$ 和 $i_{L_L}$ 的一阶导数。下面我们来想办法将方程(7-23)右端的 $i_{C_T}$ 、 $u_{L_L}$ 和 $i_{L_T}$ 用状态变量 $u_{C_T}$ 、 $i_{L_L}$ 和激励变量 $u_{E_T}$ 、 $i_{J_L}$ 来表示。其具体步骤如下:

**步骤1** 用连支电流表示 $i_{C_T}$ ，用树支电压表示 $u_{L_L}$ 。

由式(7-18)及式(7-19)的第二行，分别有

$$i_{C_T} = -F_{21}i_{J_L} - F_{22}i_{L_L} - F_{23}i_{R_L} - F_{24}i_{C_L} \quad (7-24)$$

$$u_{L_L} = F_{12}^T u_{E_T} + F_{22}^T u_{L_T} + F_{23}^T u_{R_T} + F_{22}^T u_{L_T} \quad (7-25)$$

**步骤2** 用 $(i_{L_L}, i_{J_L})$ 表示 $i_{L_T}$ ，用 $(u_{C_T}, u_{E_T})$ 表示 $u_{C_L}$ 。根据式(7-18)及式(7-19)的第四行有

$$i_{L_T} = -F_{41}i_{J_L} - F_{42}i_{L_L} \quad (7-26)$$

$$u_{C_L} = F_{14}^T u_{E_T} + F_{24}^T u_{C_T} \quad (7-27)$$

**步骤3** 用 $(i_{L_L}, i_{J_L})$ 的导数表示 $u_{L_T}$ ，用 $(u_{C_T}, u_{E_T})$ 的导数表示 $i_{C_L}$ 。

由式(7-22)有

$$u_{L_T} = L_{TT} \frac{d}{dt} i_{L_T} + L_{TL} \frac{d}{dt} i_{L_L} \quad (7-28)$$

将式(7-26)代入式(7-28)有

$$u_{L_T} = -L_{TT} F_{41} \frac{d}{dt} i_{J_L} + (L_{TL} - L_{TT} F_{42}) \frac{d}{dt} i_{L_L} \quad (7-29)$$

同样，由式(7-21)和式(7-27)，我们得到

$$i_{C_L} = C_L \frac{du_{C_L}}{dt} = C_L F_{14}^T \frac{d}{dt} u_{E_T} + C_L F_{24}^T \frac{d}{dt} u_{C_T} \quad (7-30)$$

**步骤4** 现在，在式(7-23)、式(7-24)、式(7-25)所涉及的变量中，还有 $i_{R_L}$ 和 $u_{R_T}$ 为非状态变量，我们设法用 $(u_{C_T}, i_{L_L}, u_{E_T}, i_{J_L})$ 表示它们。由式(7-18)、式(7-19)及式(7-20)有

$$R_L i_{R_L} = u_{R_L} = F_{13}^T u_{E_T} + F_{23}^T u_{C_T} + F_{33}^T u_{R_T} \quad (7-31)$$

$$u_{R_T} = R_T i_{R_T} = -R_T F_{31} i_{J_L} - R_T F_{32} i_{L_L} - R_T F_{33} i_{R_L} \quad (7-32)$$

由上述两式可以推导出

$$(R_L + F_{33}^T R_T F_{33}) i_{R_L} = F_{13}^T u_{E_T} + F_{23}^T u_{C_T} - F_{33}^T R_T F_{31} i_{J_L} - F_{33}^T R_T F_{32} i_{L_L} \quad (7-33)$$

定义

$$R \triangleq R_L + F_{33}^T R_T F_{33} \quad (7-34)$$

由于 $R_T$ 、 $R_L$ 均为对角阵，故 $R$ 非奇异，于是可得

$$i_{R_L} = R^{-1} (F_{13}^T u_{E_T} + F_{23}^T u_{C_T} - F_{33}^T R_T F_{31} i_{J_L} - F_{33}^T R_T F_{32} i_{L_L}) \quad (7-35)$$

用完全同样的方法，可以推导出

$$u_{R_T} = G^{-1} (-F_{31} i_{J_L} - F_{32} i_{L_L} - F_{33} G_L F_{13}^T u_{E_T} - F_{33} G_L F_{23}^T u_{C_T}) \quad (7-36)$$

式中

$$\mathbf{G} \triangleq \mathbf{G}_T + \mathbf{F}_{33} \mathbf{G}_L \mathbf{F}_{33}^T \quad (7-37)$$

**步骤 5** 利用上面几个步骤的表达式，代入化简得到标准的状态方程。这里仅给出结果，其具体推导过程请读者完成。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \\ 0 & \mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du_{C_T}}{dt} \\ \frac{di_{L_L}}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{F}_{23} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}_{23}^T & -\mathbf{F}_{22} + \mathbf{F}_{23} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}_{33}^T \mathbf{R}_T \mathbf{F}_{32} \\ \mathbf{F}_{22}^T - \mathbf{F}_{32}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}_{33} \mathbf{G}_L \mathbf{F}_{23}^T & -\mathbf{F}_{32}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C_T} \\ i_{L_L} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -\mathbf{F}_{23} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}_{13}^T & -\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}_{33}^T \mathbf{R}_T \mathbf{F}_{31} \\ \mathbf{F}_{12}^T - \mathbf{F}_{32}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}_{33} \mathbf{G}_L \mathbf{F}_{13}^T & -\mathbf{F}_{32}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{E_T} \\ i_{J_L} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -\mathbf{F}_{24} \mathbf{G}_L \mathbf{F}_{14}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{L}_{LL} \mathbf{F}_{41} - \mathbf{F}_{42}^T \mathbf{L}_{TT} \mathbf{F}_{41} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du_{E_T}}{dt} \\ \frac{di_{J_L}}{dt} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7-38)$$

式中

$$\mathbf{C} \triangleq \mathbf{C}_T + \mathbf{F}_{24} \mathbf{C}_L \mathbf{F}_{24}^T \quad (7-39)$$

$$\mathbf{L} \triangleq \mathbf{L}_{LL} + \mathbf{F}_{42}^T (\mathbf{L}_{TT} \mathbf{F}_{42} - \mathbf{L}_{TL}) - \mathbf{L}_{LT} \mathbf{F}_{42} \quad (7-40)$$

式 (7-38) 可用矩阵符号简记为

$$\mathbf{M}^{(0)} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_{C_T} \\ i_{L_L} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{(0)} \begin{bmatrix} u_{C_T} \\ i_{L_L} \end{bmatrix} + \mathbf{B}^{(0)} \begin{bmatrix} u_{E_T} \\ i_{J_L} \end{bmatrix} + \mathbf{B}_1^{(0)} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_{E_T} \\ i_{J_L} \end{bmatrix} \quad (7-41)$$

令

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} u_{C_T} \\ i_{L_L} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{E_T} \\ i_{J_L} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = (\mathbf{M}^{(0)})^{-1} \mathbf{A}^{(0)}, \quad -\mathbf{B} = (\mathbf{M}^{(0)})^{-1} \mathbf{B}^{(0)}, \quad -\mathbf{B}_L = (\mathbf{M}^{(0)})^{-1} \mathbf{B}_1^{(0)}$$

则有

$$\frac{d\dot{\mathbf{X}}}{dt} = \mathbf{A}^{(0)} \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{B} \mathbf{U} + \mathbf{B}_L \frac{d\mathbf{U}}{dt} \quad (7-42)$$

至此，我们得到了以显式表示的状态方程。可以看出，方程中出现了输入向量  $\mathbf{U}$  的导数，这和式 (7-2) 有所不同。但通过简单的变量变换

$$\mathbf{X} \triangleq \dot{\mathbf{X}} - \mathbf{B}_L \mathbf{U} \quad (7-43)$$

可将其消去。将上式代入方程 (7-41) 得

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{X} + (\mathbf{B} + \mathbf{A} \mathbf{B}_L) \mathbf{U} \quad (7-44)$$

### 公式法建立状态方程

网络如图 7-8(a) 所示，现用公式法建立状态方程。其步骤如下：

网络存在一个 C-E<sub>i</sub> 回路，一个 L-J<sub>i</sub> 割集，故复杂性阶数为

$$n = b_{LC} - (n_C - n_L) = 5 - 2 = 3$$



网络的图如图 7-8(b)所示。选择一个正常树(支路 1、2、3、4、5)如图中粗线所示,则应选  $u_{C2}$ 、 $u_{C3}$ 、 $i_{L7}$  作为状态变量。基本割集矩阵为

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

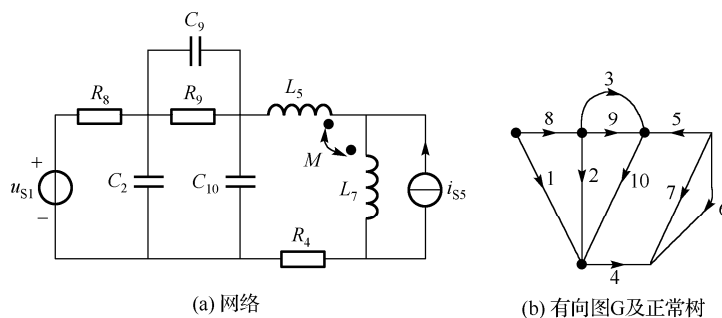


图 7-8 R、L、C、M 网络

可以看出

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{11} &= [1], \mathbf{F}_{12} = [0], \mathbf{F}_{13} = [1 \ 0], \mathbf{F}_{14} = [0] \\ \mathbf{F}_{21} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{F}_{22} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{F}_{23} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{F}_{24} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_{31} &= [-1], \mathbf{F}_{32} = [1], \mathbf{F}_{33} = [0 \ 0] \\ \mathbf{F}_{41} &= [-1], \mathbf{F}_{42} = [1] \end{aligned}$$

描写支路特性的矩阵如下

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_T &= [R_4], \mathbf{G}_T = \begin{bmatrix} 1 \\ R_4 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_L = \begin{bmatrix} R_8 & 0 \\ 0 & R_9 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_T = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_9} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_T &= \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & C_3 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_L = [C_{10}] \\ \mathbf{L}_{TT} &= [L_5], \mathbf{L}_{TL} = [M], \mathbf{L}_{LT} = [M], \mathbf{L}_{LL} = [L_7] \end{aligned}$$

因此可以算出

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{R}_L + \mathbf{F}_{33}^T \mathbf{R}_T \mathbf{F}_{33} = \begin{bmatrix} R_8 & 0 \\ 0 & R_9 \end{bmatrix} \\ \mathbf{G} &= \mathbf{G}_T + \mathbf{F}_{33} \mathbf{G}_L \mathbf{F}_{33}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ R_4 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \mathbf{C}_T + \mathbf{F}_{24} \mathbf{C}_L \mathbf{F}_{24}^T = \begin{bmatrix} C_2 + C_{10} & -C_{10} \\ -C_{10} & C_3 + C_{10} \end{bmatrix} \\ \mathbf{L} &= \mathbf{L}_{LL} + \mathbf{F}_{42}^T (\mathbf{L}_{TT} \mathbf{F}_{42} - \mathbf{L}_{TL}) - \mathbf{L}_{LT} \mathbf{F}_{42} = L_7 + L_5 - 2M \end{aligned}$$

将上述结果代入方程 (7-38), 经过计算可得

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}^{(0)} &= \left[ \begin{array}{cc|c} C_2 + C_{10} & -C_{10} & 0 \\ -C_{10} & C_3 + C_{10} & 0 \\ \hline 0 & 0 & L_7 + L_5 - 2M \end{array} \right], \quad \mathbf{A}^{(0)} = \left[ \begin{array}{cc|c} -\frac{1}{R_8} & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{R_9} & 1 \\ \hline 1 & -1 & -\frac{1}{R_4} \end{array} \right] \\
 \mathbf{B}^{(0)} &= \left[ \begin{array}{c|c} \frac{1}{R_8} & 1 \\ \hline 0 & -1 \\ \hline 0 & \frac{1}{R_4} \end{array} \right], \quad \mathbf{B}_l^{(0)} = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & L_5 - L_7 \end{array} \right] \\
 \mathbf{M}^{(0)^{-1}} &= \left[ \begin{array}{cc|c} \frac{C_3 + C_{10}}{(C_2 + C_{10})(C_3 + C_{10}) - C_{10}^2} & \frac{C_{10}}{(C_2 + C_{10})(C_3 + C_{10}) - C_{10}^2} & 0 \\ \frac{C_{10}}{(C_2 + C_{10})(C_3 + C_{10}) - C_{10}^2} & \frac{C_2 + C_{10}}{(C_2 + C_{10})(C_3 + C_{10}) - C_{10}^2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{L_7 + L_5 - 2M} \end{array} \right] \\
 &= \left[ \begin{array}{cc|c} \frac{C_3 + C_{10}}{C_d} & \frac{C_{10}}{C_d} & 0 \\ \frac{C_{10}}{C_d} & \frac{C_2 + C_{10}}{C_d} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{L} \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

状态方程为

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_{C2} \\ u_{C3} \\ i_{L7} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{C_3 + C_{10}}{C_d R_8} & -\frac{C_{10}}{C_d R_9} & -\frac{C_3}{C_d} \\ -\frac{C_{10}}{C_d R_8} & -\frac{C_2 + C_{10}}{C_d R_8} & \frac{C_2}{C_d} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{LR_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C2} \\ u_{C3} \\ i_{L7} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_3 + C_{10}}{C_d R_8} & \frac{C_3}{C_d} \\ \frac{C_{10}}{C_d} & \frac{C_2}{C_d} \\ 0 & \frac{1}{LR_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{S1} \\ i_{S6} \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_5 - L_7}{L} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_{S1} \\ i_{S6} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

本例所得到的状态方程中含有电流源的导数项, 我们注意到本例中的  $L-J_i$  割集中含有电流源  $i_{S6}$ , 因此出现了导数项。而  $C-E_i$  回路中不含有电压源, 所以方程不含电压源的导数项。

事实上,对一般情况上述性质也是成立的。当网络所有的C-E<sub>i</sub>回路中不含独立电压源时,其回路矩阵 $\mathbf{B}$ 的子矩阵 $-\mathbf{F}_{14}^T = \mathbf{0}$ ,因此 $-\mathbf{F}_{24}\mathbf{C}_L\mathbf{F}_{14}^T = \mathbf{0}$ ,同样,当网络中所有的L-J<sub>i</sub>割集中不含电流源时,其基本割集矩阵 $\mathbf{Q}$ 的子矩阵 $\mathbf{F}_{41} = \mathbf{0}$ ,因此 $\mathbf{L}_{LL}\mathbf{F}_{41} - \mathbf{F}_{42}^T\mathbf{C}_L\mathbf{F}_{41} = \mathbf{0}$ 。根据这个性质,可以很容易从网络的拓扑结构中判断出是否出现输入项的导数项。

从本例建立状态方程的过程中,我们看到用系统公式法建立状态方程要进行大量的运算。在手工计算时,这是很繁杂的,甚至远不如用直观推导状态方程来得方便。但是这类计算大量的矩阵相乘和相加的运算,这类运算特别适合于编写程序由计算机来完成。因而系统公式建立状态方程的方法为计算机建立大规模网络的状态方程提供了有效的途径。

### 7.2.3 状态方程的端口建立法

现在我们讨论另一种状态方程的系统建立方法。这种方法有较强的适用性。为讨论方便起见,我们首先考虑网络中不含C-E<sub>i</sub>回路和L-J<sub>i</sub>割集的情况。设网络中不含受控源,且电容元件个数为 $b_C$ 个,电感元件个数为 $b_L$ 个,则网络复杂性阶数为

$$n = b_C + b_L$$

这样,所有的电容电压和电感电流均可选为状态变量。根据前面的讨论,所有的电容支路均可选为树支,而所有的电感支路均可选为连支。假定网络激励为 $m$ 个,其中独立电压源为 $m_n$ 个,独立电流源为 $m_i$ ,则 $m = m_n + m_i$ ,于是

$$\mathbf{X} = (u_{C1}, u_{C2}, \dots, u_{Cb_C}, i_{L1}, i_{L2}, \dots, i_{Lb_L})^T = \begin{bmatrix} u_{C_T} \\ i_{L_L} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = (u_{S1}, u_{S2}, \dots, u_{Sm_n}, i_{S1}, i_{S2}, \dots, i_{Sm_i})^T = \begin{bmatrix} u_{E_T} \\ i_{J_L} \end{bmatrix}$$

根据前面的讨论,状态方程可以写为

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$

为讨论方便,我们将上式改写为

$$\mathbf{M}^{(0)} \frac{d}{dt}\mathbf{X} = \mathbf{A}^{(0)}\mathbf{X} + \mathbf{B}^{(0)}\mathbf{U} \quad (7-45)$$

上式又称为初始状态方程,式中

$$\mathbf{M}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_L \end{bmatrix}$$

$\mathbf{C}_T$ 为对角矩阵,当电感元件之间不存在互感时, $\mathbf{L}_L$ 为对角阵,电感元件之间存在互感且耦合系数小于1时, $\mathbf{L}_L$ 为正定的对称矩阵,于是, $\mathbf{L}_L^{-1}$ 存在。我们进一步将式(7-45)改写为分块的矩阵形式,考虑到支路特性 $i_{C_T} = \mathbf{C}_T \frac{du_{C_T}}{dt}$ ,  $u_{L_L} = \mathbf{L}_L \frac{di_{L_L}}{dt}$ ,式(7-45)可改写为

$$\begin{bmatrix} i_{C_T} \\ u_{L_L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C_T} \\ i_{L_L} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}}_{11} & \hat{\mathbf{H}}_{12} \\ \hat{\mathbf{H}}_{21} & \hat{\mathbf{H}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{E_T} \\ i_{J_L} \end{bmatrix} \quad (7-46)$$

我们设法对式 (7-46) 中各个矩阵做出物理解释, 为此, 将网络中所有的储能元件和独立源支路作为端口从网络中抽出, 则余下部分就变成了只含电阻性元件的  $n+m$  端口的电阻子网络, 如图 7-9 所示, 注意各个电感端口支路之间可以存在互感。

现对图 7-9 网络作如下处理: 令电感端口和电流源端口开路, 电压源端口短路, 将电容端口改接为电压源, 如图 7-10 所示。对图示网络, 以电容端口的电流作为响应变量时, 有

$$i_{C_T} = -Y_T u_{C_T} \quad (7-47)$$

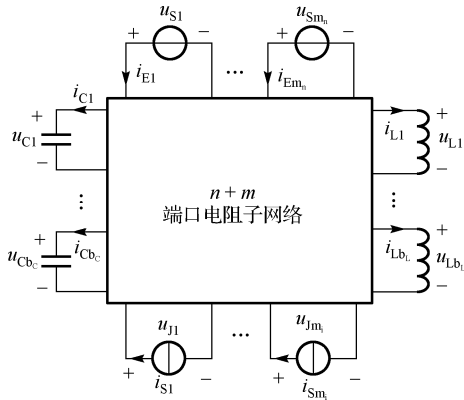


图 7-9 将储能元件及电源支路作为端口抽出以形成电阻子网络

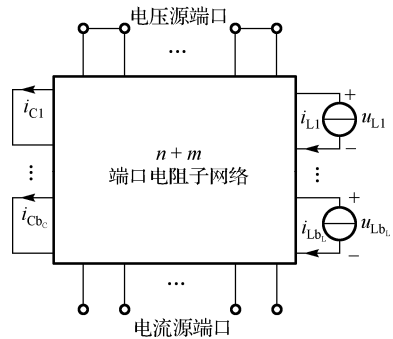


图 7-10 将电感及电流源端口开路, 电压源端口短路得到的子网络

式中  $Y_T$  是图 7-10 的电阻子网络电容端口的短路导纳矩阵。注意, 负号的出现是由于电容端口电流流出端口的缘故。当原网络变成图 7-10 所示网络时, 实际是将独立源置零, 电感支路开路, 即有  $u_{E_T} = 0, i_{L_L} = 0, i_{J_L} = 0$ 。由式 (7-46) 可得

$$i_{C_T} = H_{11} u_{C_T} \quad (7-48)$$

比较式 (7-47) 和式 (7-48) 得

$$H_{11} = -Y_T \quad (7-49)$$

如果在图 7-10 中, 以电容端口电压为输入变量, 电感端口电压为输出变量, 则有

$$u_{L_L} = \mu u_{C_T} \quad (7-50)$$

式中,  $\mu$  是图 7-10 中电阻子网络以电感端口为输出端口、以电容端口为输入端口的电压传输比矩阵。同样, 由式 (7-46) 可得

$$u_{L_L} = H_{21} u_{C_T} \quad (7-51)$$

于是得

$$H_{21} = \mu \quad (7-52)$$

这样一来, 我们对原网络进行一些处理, 根据剩余电阻子网络的一些参数矩阵, 可以很方便地得出  $H_{11}$  和  $H_{21}$ , 并且可以对它们的物理意义做出解释, 而不必进行繁杂的公式代入运算。

如果将  $n+m$  端口的电阻子网络的电容端口和电压源端口短路, 电流源端口开路, 以电感端口电流作为激励, 如图 7-11 所示。

仿照前面同样的讨论, 可以得出

$$\mathbf{H}_{12} = \boldsymbol{\beta} \quad (7-53)$$

$$\mathbf{H}_{22} = -\mathbf{Z}_L \quad (7-54)$$

式中,  $\boldsymbol{\beta}$  是图 7-11 所示网络中以电感端口为输入端口, 以电容端口为输出端口的电流传输比矩阵;  $\mathbf{Z}_L$  是图 7-11 所示网络中电感端口的开路阻抗矩阵。

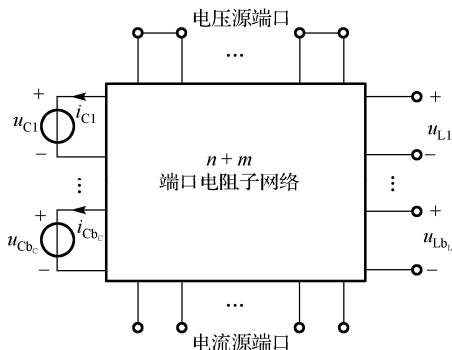


图 7-11 将电容及电压源端口短路, 电流源端口开路得到的子网络

类似的, 将  $n+m$  端口的电阻子网络中所有电感端口和电流源端口开路, 电容端口短路, 以电压源端口中各端口电压作为激励变量, 则有

$$\hat{\mathbf{H}}_{11} = -\hat{\mathbf{Y}}_T \quad (7-55)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{21} = \hat{\boldsymbol{\mu}} \quad (7-56)$$

式中,  $\hat{\mathbf{Y}}_T$  为经过上述处理的电阻子网络中以电压源端口为输入端口, 以电容端口为输出端口的转移短路导纳矩阵;  $\hat{\boldsymbol{\mu}}$  是上述子网络中以电压源端口为输入端口, 以电感端口为输出端口的电压传输比矩阵。

如果将  $n+m$  端口的电阻子网络中所有电容端口和电压源端口短路, 电感端口开路, 以电流源端口中各端口电流作为激励变量, 则有

$$\hat{\mathbf{H}}_{12} = \hat{\boldsymbol{\beta}} \quad (7-57)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{22} = -\hat{\mathbf{Z}}_L \quad (7-58)$$

式中,  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  是经过上述处理的以电流源端口为输入端口, 以电容端口为输出端口的电流传输比矩阵;  $\hat{\mathbf{Z}}_L$  是上述子网络中电流源端口为输入端口、电感端口为输出端口的转移开路阻抗矩阵。

根据上述讨论, 我们可以将式 (7-55) 改写为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_T & 0 \\ 0 & \mathbf{L}_L \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_{C_T} \\ i_{L_L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{Y}_T & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\mu} & -\mathbf{Z}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C_T} \\ i_{L_L} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{Y}}_T & \hat{\boldsymbol{\beta}} \\ \hat{\boldsymbol{\mu}} & -\hat{\mathbf{Z}}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{E_T} \\ i_{J_L} \end{bmatrix} \quad (7-59)$$

可见, 只要对原网络中的电阻子网络进行一定处理后, 就可根据对应子网络的有关矩阵得出状态方程。这种建立状态方程的方法是根据网络中  $n+m$  端口电阻子网络的某些端口特性而建立的, 故称为端口建立法。

**例 7-6** 用端口法建立状态方程

设网络如图 7-12 所示。现用端口法建立状态方程，步骤如下：

第一步，将电压源短路，电感支路开路， $C_1$  用电压源代替，如图 7-13(a)所示。由图可得：

$$i_{C1} = \frac{u_{C1}}{R_2 + R_3} \quad \begin{bmatrix} u_{L4} \\ u_{L5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{R_2 + R_3} \\ -1 \end{bmatrix} u_{C1}$$

故

$$Y_T = \frac{1}{R_2 + R_3} \quad \mu = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{R_2 + R_3} \\ -1 \end{bmatrix}$$

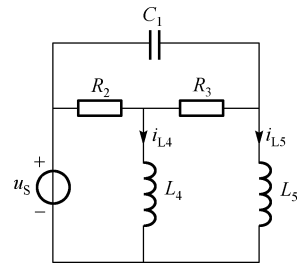


图 7-12 用端口法建立状态方程的电路图

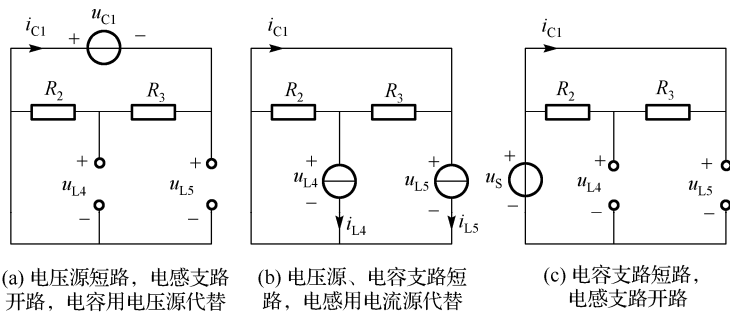


图 7-13 端口法建立状态方程

第二步，将电压源、电容支路短路， $L_4$ 、 $L_5$  用电流源代替，如图 7-13(b)所示。可得：

$$i_{C1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L4} \\ i_{L5} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_{L4} \\ u_{L5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_3 & 0 \\ R_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L4} \\ i_{L5} \end{bmatrix}$$

故

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad Z_L = \begin{bmatrix} -R_3 & 0 \\ R_3 & 0 \end{bmatrix}$$

第三步，将电容支路短路，电感支路开路，如图 7-13(c)所示。可得：

$$i_{C1} = 0 \quad \begin{bmatrix} u_{L4} \\ u_{L5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_s$$

故

$$\hat{Y}_T = 0 \quad \hat{\mu} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

初始状态方程为

$$\begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_4 & 0 \\ 0 & 0 & L_5 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ i_{L4} \\ i_{L5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 + R_3} & 1 & 1 \\ -\frac{R_2}{R_2 + R_3} & -R_3 & 0 \\ -1 & R_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ i_{L4} \\ i_{L5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_s$$

状态方程为

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ i_{L4} \\ i_{L5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1(R_2+R_3)} & \frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_1} \\ -\frac{R_2}{L_4(R_2+R_3)} & -\frac{R_3}{L_4} & 0 \\ -\frac{1}{L_5} & \frac{R_3}{L_5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ i_{L4} \\ i_{L5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_4} \\ \frac{1}{L_5} \end{bmatrix} u_S$$

由上例可见, 端口法建立状态方程实际上是把状态方程的建立转化为一组电阻电路的求解问题。应当指出, 当网络中含有受控源时, 如果受控源的存在不影响网络复杂性的阶数, 则用端口法建立状态方程显得非常便利。下面我们再看一个例子。

### 例 7-7 用端口法建立含受控源网络的状态方程

图 7-14 是一个含受控源和理想变压器的网络, 现用端口法建立状态方程。与例 7-6 相仿, 我们分别得出三个电阻子网络, 如图 7-15 所示。

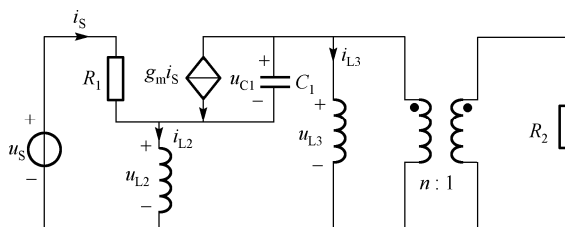


图 7-14 含受控源的网络

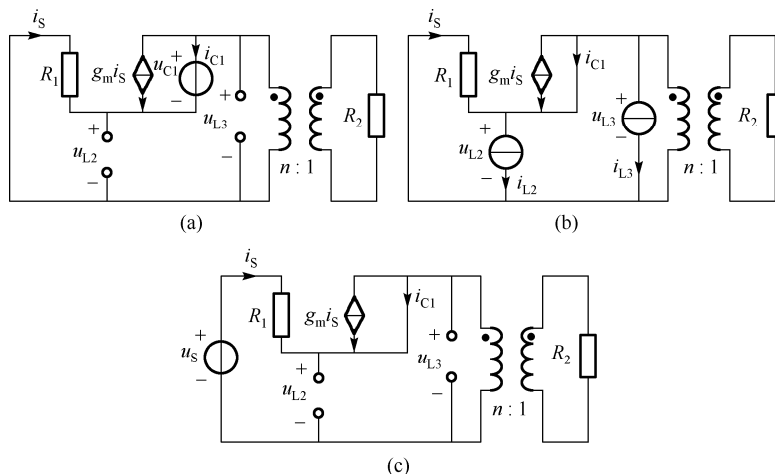


图 7-15 端口法建立有源网络的状态方程

由对图 7-15(a)所示电阻子网络, 可求出

$$i_{C1} = -\frac{1+g_m}{R_1+n^2R_2}u_{C1} \quad \begin{bmatrix} u_{L2} \\ u_{L3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_1}{R_1+n^2R_2} \\ \frac{n^2R_2}{R_1+n^2R_2} \end{bmatrix} u_{C1}$$

$$Y_T = \frac{1+g_m}{R_1+n^2R_2} \quad \mu = \begin{bmatrix} \frac{R_1}{R_1+n^2R_2} \\ -\frac{n^2R_2}{R_1+n^2R_2} \end{bmatrix}$$

由对图 7-15(b)所示电阻子网络, 可求出

$$i_{C1} = \begin{bmatrix} \frac{R_1-g_m n^2 R_2}{R_1+n^2 R_2} & -\frac{n^2 R_2(1+g_m)}{R_1+n^2 R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L2} \\ i_{L3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{L2} \\ u_{L3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{n^2 R_1 R_2}{R_1+n^2 R_2} & -\frac{n^2 R_1 R_2}{R_1+n^2 R_2} \\ -\frac{n^2 R_1 R_2}{R_1+n^2 R_2} & -\frac{n^2 R_1 R_2}{R_1+n^2 R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L4} \\ i_{L5} \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \frac{R_1-g_m n^2 R_2}{R_1+n^2 R_2} & -\frac{n^2 R_2(1+g_m)}{R_1+n^2 R_2} \end{bmatrix}$$

$$Z_L = \begin{bmatrix} -\frac{n^2 R_1 R_2}{R_1+n^2 R_2} & -\frac{n^2 R_1 R_2}{R_1+n^2 R_2} \\ -\frac{n^2 R_1 R_2}{R_1+n^2 R_2} & -\frac{n^2 R_1 R_2}{R_1+n^2 R_2} \end{bmatrix}$$

由对图 7-15(c)所示电阻子网络, 可求出

$$i_{C1} = \frac{1+g_m}{R_1+n^2R_2} u_S \quad \begin{bmatrix} u_{L2} \\ u_{L3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n^2 R_2}{R_1+n^2 R_2} \\ \frac{n^2 R_2}{R_1+n^2 R_2} \end{bmatrix} u_S$$

$$\hat{Y}_T = \frac{1+g_m}{R_1+n^2R_2} \quad \hat{\mu} = \begin{bmatrix} \frac{n^2 R_2}{R_1+n^2 R_2} \\ \frac{n^2 R_2}{R_1+n^2 R_2} \end{bmatrix}$$

经整理, 可得出网络的状态方程为

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ i_{L2} \\ i_{L3} \end{bmatrix} = \frac{1}{R_1+n^2R_2} \begin{bmatrix} -\frac{1+g_m}{C_1} & \frac{R_1-g_m n^2 R_2}{C_1} & \frac{n^2 R_2(1+g_m)}{C_1} \\ \frac{R_1}{L_2} & -\frac{n^2 R_1 R_2}{L_2} & -\frac{n^2 R_1 R_2}{L_2} \\ -\frac{n^2 R_2}{L_3} & -\frac{n^2 R_1 R_2}{L_3} & -\frac{n^2 R_1 R_2}{L_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ i_{L2} \\ i_{L3} \end{bmatrix} + \frac{1}{R_1+n^2R_2} \begin{bmatrix} -\frac{1+g_m}{C_1} \\ \frac{n^2 R_2}{L_2} \\ \frac{n^2 R_2}{L_3} \end{bmatrix} u_S$$

上述例子比较特殊, 在一般情况下, 网络含有受控源式, 我们很难直接断定网络的复杂



性阶数是否受影响。除此之外,如果电路中出现了纯电容回路、纯电感割集时,能否将上述方法进一步推广?再此我们仅仅指出建立此类网络状态方程的一般思路。

对于一般含有  $R$ 、 $L$ 、 $C$ 、 $M$  元件,独立源和受控源的有源线性网络,设网络含有  $b_c$  个电容元件,  $b_l$  个电感元件,网络中独立的纯电容回路数为  $n_c$  个,独立的纯电感割集为  $n_l$  个,且网络中不含仅由独立电压源形成的回路和仅由独立电流源形成的割集,则可对该有源线性网络选择一个树(成为有源线性网络的正常树或者常态树),其选树的规则如下。

将支路按下列顺序排列:独立电压源、受控电压源、电容、电阻、电感、受控电流源、独立电流源,选取所有的独立电压源支路、受控电压源支路、 $b_c - n_c$  个电容支路,  $n_l$  个电感支路以及某些可能的电阻支路为树支。应当注意的是:受控源被控制如果为受控电压源,必须选为树支,如果为压控的,必须选为连支。

选择有源线性网络的正常树后,将连支电容支路、树支电感支路及独立电压源支路抽出作为电压端口,将所有连支电容支路、连支电感支路及所有独立电流源支路抽出作为电流端口,用前面讨论的端口方法建立“初始状态方程”。

$$\mathbf{M}^{(0)} \frac{d}{dt} \mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{A}^{(0)} \mathbf{X}^{(0)} + \mathbf{B}^{(0)} \mathbf{U} \quad (7-60)$$

式中,向量  $\mathbf{X}^{(0)}$  由所有的树支电容、电感电压和连支电容、电感电流组成。 $\mathbf{U}$  由所有的独立源组成。 $\mathbf{X}^{(0)}$  式中的变量不一定是独立的,这些不独立的变量可设法在递归运算过程中发现并将其消去,最后可以得出

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X} = \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{B} \mathbf{U} + \left( \mathbf{B}_l \frac{d}{dt} \mathbf{U} + \dots \right) \quad (7-61)$$

$\mathbf{X}$  一般来说是  $\mathbf{X}^{(0)}$  的一个子集,且  $\mathbf{X}$  中的变量是线性无关的。

这样建立状态方程的方法实际上是一种迭代过程,他不可能得到以显式形式表示的状态方程。

## 7.3 状态方程的建立

### 7.3.1 利用信号流程图建立状态方程

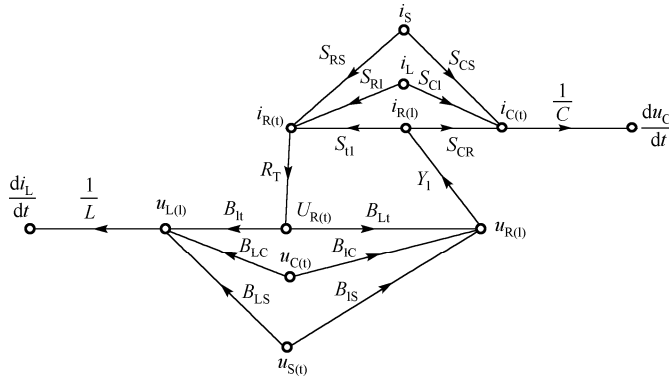
本节阐述利用信号流程图  $G_m$  图直接以图写出状态方程。

假定网络中没有由纯电容和电压源形成的回路和电感和电流源形成的割集,如图 7-16 所示,可得出有源网络状态方程的步骤:

(1) 选定一棵树:它包含有所有的电容支路和电压源,而所有电感和电流源在连支中,电阻可以任意的放在树支和连支中。

(2) 根据 KVL 可用树支电压表示连支电压,由 KCL 可用连支电流表示树支电流;对于电阻支路用 VCR 表示,如式 (7-62) 所示。

$$\begin{cases} i_T = -Q_l i_L \\ u_L = Q_l^T u_T \end{cases} \quad u_R = i_R R \quad i_g = g u_g \quad (7-62)$$

图 7-16 信号流图  $G_m$ 

(3) 对电容支路电压的导数  $\frac{du_C}{dt}$  用  $\frac{1}{C}I_C$  表示, 即  $\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C}I_C$ , 电感电流的导数  $\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}U_L$  表示。若网络中有受控电源可先把它当独立电源处理, 然后加一条支路把控制支路和受控支路连接。

$$\begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ i_S \end{bmatrix} \quad (7-63)$$

(4) 求状态方程:  $\frac{d}{dt}[x(t)] = Ax(t) + Bu(t)$  式中矩阵  $A$  和  $B$

$$x = [u_C(t), i_L(t)] \quad (7-64)$$

应用 mason 增益公式, 求

$$a_{11} = \frac{du_S / dt}{u_C}, \quad a_{12} = \frac{du_C / dt}{i_L}, \quad a_{21} = \frac{di_L / dt}{u_C}, \quad a_{22} = \frac{di}{dt} / i_L$$

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \Delta_k & \begin{cases} i_{R1} = i_{R2} + u_d \\ i_C = -(i_L + i_d + u_{R2}) \end{cases} \\ b_{ij} &= \frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \Delta_k & \begin{cases} u_L = u_1 + u_C \\ u_{R2} = u_C = u_{R1} \end{cases} \\ u_{R1} &= i_{R1} R_1 & i_{R2} &= G_2 u_{R2} \end{aligned}$$

若在网络中只有由电容和电压源组成的回路, 以及电感和电流源组成的割集, 则选择的树应包括所有的电容和电压源, 而连支中应包括所有的电感和电流源, 作 mason 图  $G_m$  建立状态方程, 还须考虑步骤 (5)

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t) + C \frac{du}{dt} \quad (7-65)$$

(5) 对于只有由电容和电压源组成的回路 (只由电感和电流源组成的割集): 链 (树) 中的电容 (电感) 电压 (电流) 导数和电流 (电压), 以及树 (连) 中的源电压 (电流) 导数用节点表示。链 (树) 中的电容 (电感) 电压 (电流) 导数节点用一条支路接到 (向着) 同一

电容的电流（电压）节点支路传输增益等于  $C(L)$ 。树（连）中的电压源和电容（电感）的电压（电流）导数节点用一条支路接到连电容（树电感）的电压（电流）导数节点，方向向着后者。根据回路（割集）中的电压（电流）参考方向，决定支路增益取+1或-1。

① 确定一棵树  $T$  ( $u_t$ 、 $i_{LS}$ 、 $C_4$ )

$$u_t = [u_E, u_C, u_{Rt}]^T, \quad i_t = [i_E, i_C, i_{Rt}]^T$$

$$u_l = [u_L, u_g, u_s]^T, \quad i_l = [i_L, i_g, i_s]^T$$

② 形成单树支割集矩阵  $\mathbf{Q} = [1 \quad \mathbf{Q}_l]$

③ KCL, KVL 得

$$i_t = -\mathbf{Q}_l i_l, \quad \text{则} \begin{bmatrix} i_l \\ i_C \\ i_{RT} \end{bmatrix} = [-\mathbf{Q}_l] \begin{bmatrix} i_l \\ i_g \\ i_s \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_C \\ i_{RT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_{l21} & -Q_{l22} & -Q_{l23} \\ -Q_{l31} & -Q_{l32} & -Q_{l33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_l \\ i_g \\ i_s \end{bmatrix} \quad (7-66)$$

$$u_l = \mathbf{Q}_l^T u_t \quad \text{则} \begin{bmatrix} u_L \\ u_g \\ u_s \end{bmatrix} = [\mathbf{Q}_l^T] \begin{bmatrix} u_E \\ u_C \\ u_{Rt} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_C \\ u_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{l21}^T & Q_{l22}^T & Q_{l23}^T \\ Q_{l31}^T & Q_{l32}^T & Q_{l33}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_E \\ u_C \\ u_{Rt} \end{bmatrix} \quad (7-67)$$

④ 应用式 (7-66) 和式 (7-67) 及

$$\begin{cases} u_{Rt} = R_t i_{Rt} \\ i_g = Y_l u_g \end{cases}$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} i_C$$

$$\frac{di_C}{dt} = \frac{1}{L} u_L$$

画流程图：

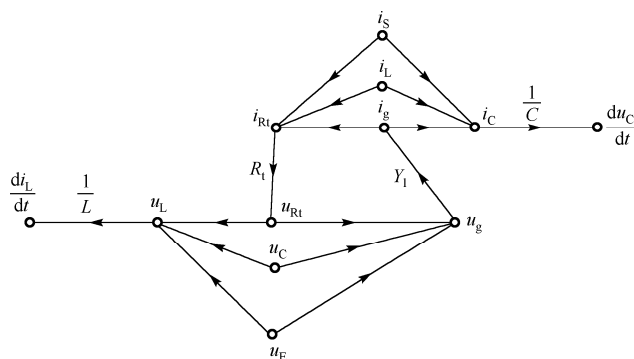


图 7-17 信号流程图

⑤ 写出状态方程标准式求系数。

例 7-8 如图 7-18 所示求网络状态方程。

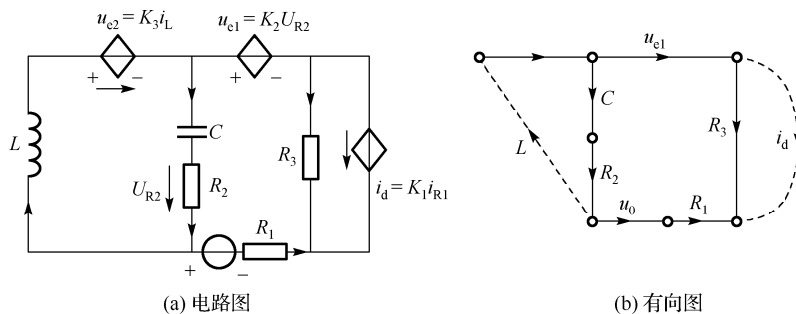


图 7-18 电力网络图

解:

树的排列为  $[u_0, u_{e1}, u_{e2}, u_C, u_{R2}, u_{R3}, i_2, i_3, i_C]$

连支排列为  $[u_L, u_{R1}, i_{R1}, i_d, i_L]$

信号流图  $G_m$  如图 7-19 所示。

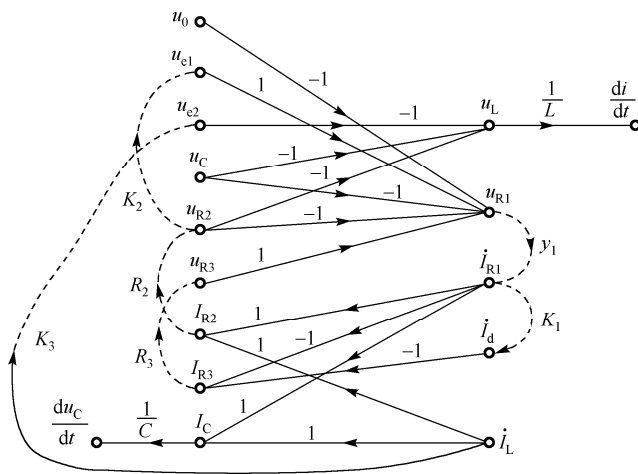


图 7-19 信号流图  $G_m$

① 用树支电压表示连支电压:

$$\begin{cases} u_L = -u_{e2} - u_C - u_{R2} \\ u_{R1} = u_{e1} + u_{R3} - u_{R2} - u_C - u_0 \end{cases}$$

② 用连支电流表示树支电流:

$$\begin{cases} i_{R2} = i_L + i_{R1} \\ i_{R3} = -i_{R1} - i_d \end{cases}$$

③ 受控源方程:

$$\begin{cases} u_{e1} = K_2 u_{R2} \\ u_{e2} = K_3 i_L \\ i_d = K_1 i_{R1} \end{cases}$$

设  $x(t) = [i_L(t), u_C(t)]^T$ ,  $G_m$  图的行列式  $\Delta$  为:

$$\Delta = 1 + \frac{R_2}{R_1}(1 - K_2) + \frac{R_3}{R_1}(1 - K_1)$$

求  $a_{11}$  是  $i_L$  到  $\frac{di_L}{dt}$  的传输, 即:

$$a_{11} = \frac{1}{\Delta} \sum P_x \Delta_n = -\frac{K_3}{L} - \frac{R_2}{\Delta L} \left[ 1 + \frac{R_3}{R_1}(1 - K_1) \right]$$

$a_{12}$  是  $u_C$  到  $\frac{di_L}{dt}$  的传输, 即:

$$a_{12} = -\frac{1}{L} + R_2 / \Delta R_1 L$$

$a_{21}$  是  $i_L$  到  $\frac{du_C}{dt}$  的传输 即:

$$a_{21} = \frac{1}{C} - R_2 / \Delta R_1 C(1 - K_2)$$

$a_{22}$  是  $u_C$  到  $\frac{du_C}{dt}$  的传输 即:

$$a_{22} = -\frac{1}{\Delta R_1 C}$$

$b_{11}$  是  $u_0$  到  $\frac{di_L}{dt}$  的传输 即:  $b_{11} = R_2 / \Delta R_1 L$

$b_{21}$  是  $u_0$  到  $\frac{du_C}{dt}$  的传输 即:  $b_{21} = -\frac{1}{\Delta R_1 C}$

把以上式子代入下式:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{du_C}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} u_0$$

例 7-9 求如图 7-20 所示电路的状态方程。

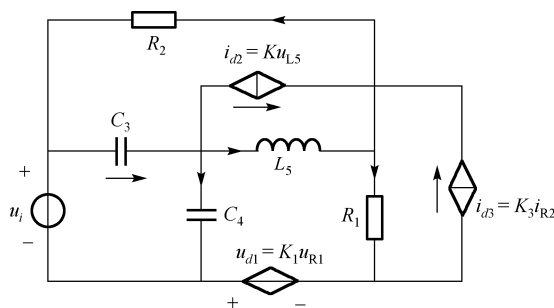


图 7-20 电路图

解: 本题  $u_i$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  构成回路, 所以考虑步骤 (5) 其状态方程为

$$\frac{d}{dt} X(t) = A r(t) + B u_i(t) + C \frac{du_i(t)}{dt}$$

选择  $u_i$ ,  $i_{L5}$ ,  $C_4$ ,  $R_1$  为树, 其余为连支 ( $u_{L5}, u_{R2}$ ), 有向图如图 7-21 所示, 信号流图  $G_m$  如图 7-22 所示。

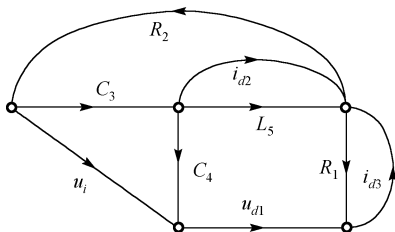


图 7-21 有向图

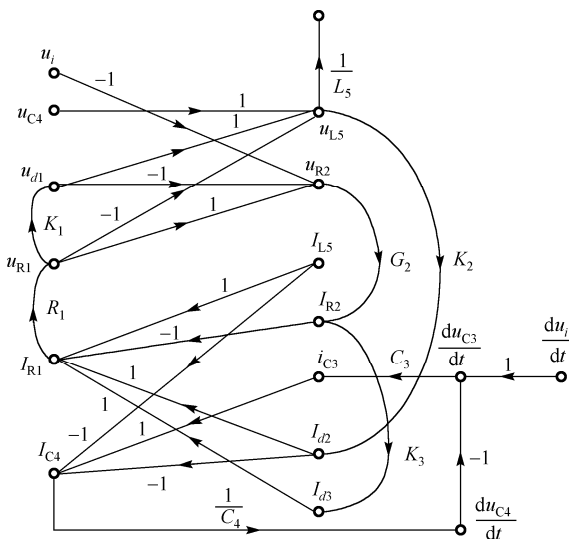


图 7-22 信号流图  $G_m$

图 7-22 中, 树支电压为  $u_i$ 、 $u_{C4}$ 、 $u_{d1}$ 、 $u_{R1}$ , 树支电流为  $i_{C4}$ 、 $i_{R1}$ , 连支电压为  $u_{L5}$ 、 $u_{R2}$ , 连支电流为  $i_{L5}$ 、 $i_{R2}$ 、 $i_{C3}$ 、 $i_{d2}$ 、 $i_{d3}$ 。

注: ①  $C_3$  是作为连支, 所以  $i_{C3} = C_3 \frac{du_{C3}}{dt}$ 。

②  $u_i$ 、 $u_{C4}$  作为树支电压,  $u_{C3}$  为连支, 则树支中的电源和电容的电压导数节点用一条有向支路接到连支中电容电压导数节点。其增益根据回路中电压参考方向取 +1 或 -1 (因为  $u_{C3} = u_i - u_{C4}$ , 所以  $\frac{du_i}{dt}$  取 1,  $\frac{du_{C4}}{dt}$  取 -1)。

设  $X(t) = [u_{C4}(t) \quad i_{L5}(t)]^T$ , 图的行列式  $\Delta$  为:

$$\Delta = \left(1 + \frac{C_3}{C_4}\right) \left[1 + R_1 K_2 (K_1 - 1) + \frac{R_2}{K_2} (1 - K_1)\right] + K_3 R_1 (K_1 - 1) K_2 \frac{C_3}{C_4}$$

(1)  $u_{C4}$  到  $\frac{du_4}{dt}$  的传输:

$$a_{11} = \frac{1}{\Delta} \frac{K_2}{C_4} [1 + R_1 G_2 (1 - K_1)]$$

(2)  $i_{L5}$  到  $\frac{du_4}{dt}$  的传输:

$$a_{12} = \frac{1}{\Delta C_4} [1 + K_2 R_1 (K_1 - 1) + R_1 G_2 (1 - K_1) - R_1 K_2 (K_1 - 1)]$$

(3)  $u_{C4}$  到  $\frac{di_5}{dt}$  的传输:

$$a_{21} = \frac{1}{\Delta L_5} \left( 1 + \frac{C_3}{C_4} \right) [1 + R_1 G_2 (1 - K_1)]$$

(4)  $i_{L5}$  到  $\frac{di_5}{dt}$  的传输:

$$a_{22} = \frac{1}{\Delta L_5} \left[ \frac{1}{C_4} C_3 K_3 R_1 (K_1 - 1) - R_1 (K_1 - 1) \left( 1 + \frac{C_3}{C_4} \right) \right]$$

(5)  $u_i$  到  $\frac{du_{C4}}{dt}$  的传输:

$$b_{11} = \frac{1}{\Delta R_2 C_4} R_1 (K_1 - 1) K_2$$

(6)  $u_i$  到  $\frac{di_5}{dt}$  的传输:

$$b_{21} = \frac{1}{\Delta L_5 R_2} R_1 (K_1 - 1) \left( 1 + \frac{C_3}{C_4} \right)$$

(7)  $\frac{du_i}{dt}$  到  $\frac{du_4}{dt}$  的传输:

$$c_{11} = \frac{1}{\Delta} \frac{C_3}{C_4} [(1 + R_1 K_2 (K_1 - 1) + R_1 G_2 (1 - K_1) + R_1 K_3 K_2 (K_1 - 1))]$$

(8)  $\frac{du_i}{dt}$  到  $\frac{di_5}{dt}$  的传输:

$$c_{21} = \frac{1}{\Delta L_5} C_3 R_1 K_3 (K_1 - 1)$$

把以上导数代入下式:

$$\begin{bmatrix} u_{C4} \\ i_{L5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C4} \\ i_{L5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} u_i + \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix} \frac{du_i}{dt}$$

### 7.3.2 代数余子式的拓扑法

$\Delta$  是图  $G$  的所有树:  $V$ 。

$\Delta_{ii}$  是图 G 中  $i$  节点对参考点短路后的图  $G'$  的全部树。

$\Delta_{ij}$  是图 G 中  $i$  节点对参考点短路后的图  $G'$  的全部树  $W_{i,r}$ ，与图 G 中  $j$  节点对参考节点短路的子图  $G''$  全部树  $w_{j,r}$  的交集。

$$\Delta_{ij} = W_{ji,r} = W_{j,r} \cap W_{i,r} \quad (7-68)$$

## 7.4 单双口网络状态方程

### 7.4.1 单口网络策动点函数 $Z_d(s)$ 和 $Y_d(s)$

$$Z_d(s) = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{W_{1,1'}}{V} \quad \frac{1}{Z_d} = Y_d(s) = \frac{V}{W_{1,1'}} \quad (7-69)$$

### 7.4.2 双口网络 $Z$ 函数

如图 7-23 所示双口网络：

$$Z_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}, \quad Z_{12} = Z_{21} = \frac{\Delta_{12} - \Delta_{12'}}{\Delta} \quad (7-70)$$

$$Z_{22} = \Delta_{22} + \Delta_{2'2'} - \frac{2\Delta_{22'}}{\Delta} \quad (7-71)$$

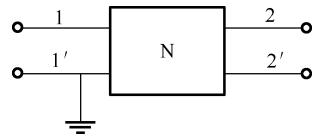


图 7-23 双口网络

$$\therefore Z_{11} = \frac{W_{r,r}(Y)}{V(Y)} \quad (7-72)$$

$$Z_{12} = Z_{21} = \frac{W_{12,1'} - W_{12',1'}}{V(Y)} = \frac{W_{12,1'2'} - W_{12',1'2'}}{V} \quad (7-73)$$

$$Z_{22} = W_{2,1'} + W_{2'1'} - \frac{2W_{22',1'}}{V(Y)} = \frac{W_{2,2'}}{V} \quad (7-74)$$

$$W_{12,1'} - W_{12',1'} = \begin{pmatrix} 1 & - & 2 \\ 1' & - & 2' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & & 2 \\ 1' & \times & 2' \end{pmatrix} \quad (7-75)$$

例 7-10 如图 7-24 所示求 N 的  $Z$  参数。

解：

$$V = y_1 y_2 y_3 y_4 y_6 + y_1 y_2 y_3 y_5 y_6 \\ + y_1 y_3 y_4 y_5 y_6 + y_1 y_2 y_4 y_5 y_6$$

$$W_{2,2'} = y_1 y_2 y_3 y_4 + y_1 y_2 y_3 y_5 \\ + y_1 y_2 y_3 y_6 + y_1 y_2 y_4 y_5 \\ + y_1 y_2 y_4 y_6 + y_1 y_3 y_4 y_5 + y_1 y_3 y_4 y_6$$

$$W_{1,1'} = y_1 y_3 y_4 y_6 + y_1 y_3 y_5 y_6 \\ + y_1 y_4 y_5 y_6 + y_2 y_3 y_5 y_6 \\ + y_2 y_3 y_4 y_6 + y_2 y_4 y_5 y_6 + y_3 y_4 y_5 y_6$$

$$W_{12,1'2'} = y_1 y_3 y_4 y_6$$

$$W_{12',1'2} = 0$$

$$\therefore Z_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{W_{1,1'}}{V}, \quad Z_{12} = W_{12,1'2'} - \frac{W_{12',1'2}}{V} = \frac{W_{12,1'2'}}{V}, \quad Z_{22} = \frac{\Delta_{2,2'}}{\Delta} = \frac{W_{2,2'}}{V}$$



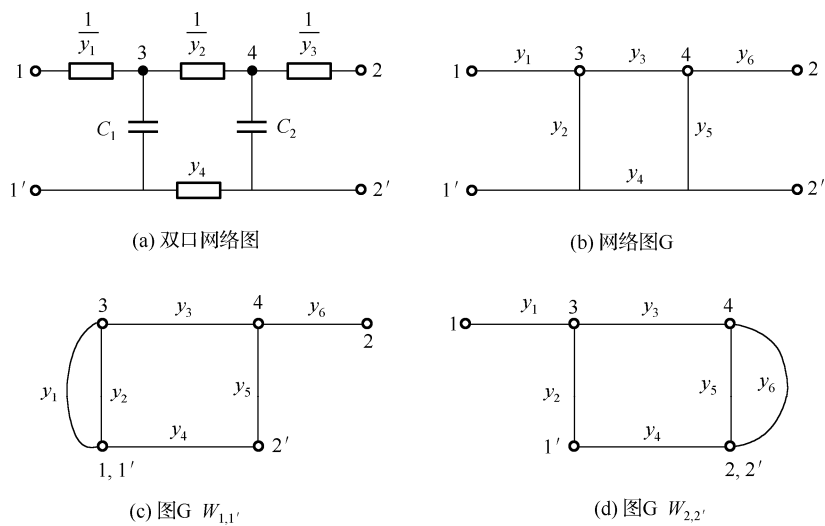


图 7-24 双口网络图和图 G

# 电力网接地网故障诊断技术

## 8.1 接地网故障的原因及其故障的危害性

电力系统接地网是维护电力系统安全可靠运行、保障运行人员和电气设备安全的重要设施。接地网故障可由多方面因素引起，如施工时的不良焊接或漏焊、土壤酸碱性对接地导体的腐蚀作用、接地短路电流引起的电动力和热效应等，造成接地网接地电阻发生变化，达不到工程规范要求。

### 8.1.1 接地网的导体腐蚀

接地网导体腐蚀是造成接地网故障的最主要因素。导体腐蚀的原因主要有：接地网设计中未充分重视按腐蚀条件合理选择导体的材料及截面积；对接地引下线和地网导体未采取必要的防腐措施。因此随着时间的推移，导体由于被腐蚀而使其有效截面积不断减小，不能满足热稳定和动稳定的要求。当工频接地短路电流或雷电流流经接地网时，造成因发热或电动力导致接地体或接地引线断裂，引起一次、二次设备事故。

接地网导体被腐蚀主要是受土壤侵蚀的影响。土壤腐蚀不仅由土壤物理化学性能决定，还与导体材料及二者相互作用的性质密切相关。金属在土壤中的腐蚀按其性质属于电化学腐蚀。不同土壤的腐蚀性相差较大，有其本身的特殊规律，土壤中金属腐蚀一般分为自然腐蚀和电腐蚀两类。

土壤腐蚀和在电解质溶液中的腐蚀及大气腐蚀有所不同，其中最具特征性质的是氧的传递。氧在水溶液中通过液态本体输送，在大气腐蚀时通过电解液薄膜，而在土壤腐蚀时通过土壤的微孔输送。因而土壤中氧的传递速度，取决于土壤的结构和湿度。在不同土壤中，氧的渗透率就会有显著的变化，变化幅度可达 3~5 个数量级。这与溶液中腐蚀及大气腐蚀有所不同。由于同样的原因，土壤腐蚀时氧浓差起很大的作用。

### 8.1.2 土壤电阻率不均匀

土壤电阻率不均匀也是造成接地网故障的又一因素。通常，土壤的电阻率沿纵深和横向分布是不均匀的。就纵深来说，不同深度土壤的电阻率是不同的。接近地面几米以内的电阻率不稳定，会随季节气候的变化而变化，而土壤越深，其电阻率则越稳定。而对面积较大的变电站，如 220kV 及以上变电站，土壤结构一般由多层不同特性的土壤组成。要获得准确等值的土壤电阻率，必须对土壤的分层电阻率进行测试分析。然而，在设计接地网时，经常是用等值电阻率来等效实际复杂的土壤结构以进行接地电阻的估算，结果往往是设计值与实际值相差甚远。由此造成选择的接地网导体不能满足要求，或者局部腐蚀，甚至断裂。

### 8.1.3 电位分布不均

电位分布不均匀,也是造成接地网故障的重要因素。由于接地网电位分布不均匀,会造成大电流入地时电位差过大,这对变电站弱绝缘或二次系统的安全构成威胁。为更准确地了解接地系统安全的情况,要测量接地网电位分布,通过对历次电位分布的比较分析,可以及早发现事故隐患、定位故障点,为接地网的及时维修和改造提供科学依据。

### 8.1.4 接地网故障的危害性

由于上述诸多原因,埋设在地下的接地网会发生各种故障,导致接地网导体的电气连接不良、接地电阻增大,使接地网接地性能变坏。接地网存在故障时,当电力系统发生接地短路故障或遭受雷击,设备接地点的电位以及地表的局部电位差都会异常升高,或分布不均,除给运行人员安全带来严重威胁外,还可能因反击或电缆皮环流使二次设备的绝缘遭到破坏,高压窜入控制室,引起检测或控制设备发生误动作或拒动,由此引起连锁事故反应,导致系统稳定被破坏,致使大面积的电网瘫痪,被迫停电,带来巨大的经济损失和不良的社会影响,我国每年因接地事故造成的损失十分巨大。

资料表明,国内外近年来有不少由于接地不良引起和造成事故扩大,导致系统停运、设备损坏的实例。为避免由地网反击电压和地下杂散电流产生的地网杂散电位对计算机监控系统、微机保护、自动控制等装置的损坏和干扰,保证电力系统安全稳定运行,必须使接地装置的接地电阻达到较低的值,以确保短路电流及雷电流的安全散流。

由此可见,接地网是保证电力系统安全可靠运行的重要设施,其性能好坏直接关系到操作人员的人身安全和各类电气设备的正常运行。接地网故障是影响电力系统安全运行的重要隐患。随着电力系统的发展,接地短路电流不断增大,接地网故障的问题日益严重。所以定时对接地网的状态进行检测和维护是十分重要的。如果能定时对电力系统接地网进行维护和检测,防范于未然,将能减少不必要的经济损失。

因而,研究接地网故障检测方法和降低接地网电阻的方法和措施,能在不停电和不对地网大面积开挖的情况下,通过测量接地引线之间的电压,利用一些计算方法,对接地网的断点和腐蚀情况进行检测,及时发现故障隐患,防止由于接地不良造成的危害,对保障电力系统安全可靠运行,具有重要的社会意义和经济效益。

## 8.2 接地电阻常用的计算方法

接地网是埋入地中的接地体与设备接地引下线的总称。合格的接地网是确保电气设备在正常运行及故障情况下,都能可靠和安全运行的重要保护措施之一。接地是将电气设备的某些部分用导线(接地线)与埋在土壤中的金属导体(接地体或接地极)相连接。接地电阻是接地系统中的一项重要技术指标,是确认接地系统的有效性、安全性以及鉴定系统是否符合设计要求的重要参数。其优劣直接影响到接地好坏,进而影响各类设备的工作情况。如果接地网接地电阻不合格,当电力系统发生接地短路故障时,短路电流可能使接地网电位升高而反击二次电缆,甚至通过二次电缆串入控制室以致烧坏二次设备及有关设施。因此,选择正确的方法测量接地网的接地电阻,得出真实数据,为接地网整改及接地网故障分析提供依据,对保障电网安全运行是极其重要的。

### 8.2.1 接地网设计及有关问题

电力系统发生接地短路故障或其他大电流入地时，电流通过接地系统快速散失，从而保证工作人员人身和电气设备的安全。如果接地系统设计不合理，接地电阻值偏大，就会造成接地网电位异常升高，不但威胁着运行人员的安全，还可能因反击电流使得二次设备的绝缘遭到破坏，轻则导致监控设备发生误动或拒动，重则破坏监控设备从而扩大事故，产生巨大的经济损失和社会影响。

随着电网供电容量的不断扩大，电力系统接地故障电流也越来越大，为了确保电力系统安全、可靠运行，对接地网的要求也越来越高（要求有较低的接地电阻值）。然而新建的变电站一般都建在土壤电阻率较高的地区，同时变电站已逐渐向占地小的 GIS 方向发展。因此，如何使较小面积的市区变电站的接地电阻值达到要求，是迫切需要解决的问题。

### 8.2.2 接地网形式

变电站的接地应充分利用自然接地体，例如：①埋设在地下的金属管道（易燃和易爆介质的管道除外）；②金属井管；③变电站与大地有可靠连接的建筑物、构架物的金属结构和钢筋混凝土基础；④穿线的钢管，电缆的金属外皮等。在充分利用自然接地体的基础上，110kV、220kV 变电站接地网通常敷设水平接地体。对面积较大的接地网，降低接地电阻主要靠大面积水平接地体，它既有均压、减小接触电势和跨步电势的作用，又有散流的功能。水平接地网一般采用方孔或者长孔的网格形式，尽管方孔地网所用材料比长孔多，且工频接地电阻与跨步电势十分接近，但在雷击时呈现的冲击接地电阻却有很大的差别，方孔地网的冲击接地电阻比长孔地网要小得多，因此，普遍选用方孔地网，地网的外缘闭合且各角做成圆弧形，圆弧的半径要求大于均压带间距的一半，埋设深度取 0.8m。

### 8.2.3 接地网的材料

接地网材料主要有钢和铜。铜的抗腐蚀能力强，寿命是钢的 5 倍多，在土壤中其表面上产生附着力极强的  $\text{Cu}(\text{OH})_2$ （绿铜），有效地阻断了进一步的腐蚀。铜的导电性好，电阻率低，泄流较快，接地阻抗、网内的电位差也较小，常温下铜和钢的电阻率分别为  $17\mu\Omega\cdot\text{mm}$  和  $138\mu\Omega\cdot\text{mm}$ 。对同样的接地网和土壤，取相同的接地阻抗，铜的截面要比钢小很多。铜接地网的缺点是造价高且大面积的铜接地网会增强变电站基础钢筋和地下钢管的电腐蚀性。

根据实践经验，以下两种情况建议使用铜材：一是市中心的户内变电站的主接地网，由于高楼林立，放线工作很难达到要求，接地电阻测试相当困难，接地装置在建筑物下面很难开挖检查；二是变电站做了双层接地网的下层接地网也应使用铜材敷设，主要是考虑下层接地网的埋深以及日后无法维修的原因。接地网导体截面选择，应考虑一定的裕度。接地网水平接地体通常是  $\phi 16\text{mm}$  的热镀锌钢或  $4\times 40\text{mm}$  铜排；垂直接地体使用  $50\times 5\text{mm}$  的镀锌角钢或  $\phi 18\text{mm}$  铜棒。

### 8.2.4 设计误差及改进措施

设计接地网时采用的土壤电阻率主要通过两种途径获得：一是设计人员现场采用四极法测量原土层的土壤电阻率；二是根据地质资料查手册所对应的土壤电阻率。前者比较科学和

准确,但是四极法是属于在场地中抽样测量,在接地网埋设处地质经常出现断层,地电阻率是不均匀的,山坡地形还需要在不同的方位、不同的方向进行测量,找出沿横向、纵向和不同深层的土壤电阻率。要提高精度必须增加测次,这给设计人员带来很大的工作量。后者考虑了场地不同点土壤电阻率的偏差,但是同种土壤的电阻率会存在一定的差异,特别是南北方同种土壤之间差别很大,会造成很大的误差。因此,在变电站初步设计阶段,地质勘察中应增加土壤电阻率测量的内容,由于地质勘察要求的站址勘探孔通常有几十个,勘测的岩芯有几十米深,对多根岩芯的土壤进行测量,其值是可靠的。

### 8.2.5 接地电阻的计算方法

变电站接地网的接地电阻要满足要求,首先要了解当地包括土壤条件、降水条件在内的诸多因素,针对工程条件,如施工允许面积、工程量等,合理选择接地材料 and 设计接地网系统,计算接地电阻。接地电阻通常由以下三部分组成:①接地装置本身的金属电极电阻;②接地装置与土壤之间的接触电阻;③接地装置经土壤向外扩散的流散电阻。接地电阻测量方法常用的有三极法、四极法、变频测量法、异频测量法、多电极布置法等。其中多电极布置法是在接地体四周不止多个电流极,以使电流场地面电位分布及测量电阻值更接近于真实值,测量误差更小。在选择变电站接地网接地电阻测量方法时,应综合考虑各方面的影响因素,选取适当的测量方法,并采取措施以减少各个环节的测量误差。目前,在实际工程中对接地网接地电阻的计算,主要依据是电力部颁布的《电力设备接地设计技术规程》。除《规程》所推荐的接地网接地电阻标准计算公式外,还发展起来了许多简易式和改进式等接地网的接地参数解析计算式。

(1) 接地网电阻值的估算。

根据规范,接地网电阻值  $R=0.5\rho/\sqrt{A}$ 。假设接地网所占面积  $A$  内全部铺满钢材,即地网为面积为  $A$  的金属板时,接地电阻可达最小值;反之,把水平接地体减少到只剩一个地网轮廓的外框,接地电阻将达到最大值。如果把地网面积用一等值的圆面积近似,则接地电阻的最小值  $R_1$  和最大值  $R_2$  分别用圆盘电极和圆环电极的接地电阻公式进行估算,即:

$$R_1 = \frac{\rho}{4b} \left( 1 - \frac{4h}{\pi b} \right) \text{ 或 } R_1 = \frac{\rho}{8b} \left( 1 + \frac{b}{b+26h} \right) \quad (8-1)$$

$$R_2 = \frac{\rho}{4\pi^2 b} \ln \frac{64b^2}{hd} \text{ 或 } R_2 = \frac{\rho}{2\pi d} \ln \frac{64b^2}{hd} \left( \ln \frac{l^2}{hd} + 0.48 \right) \quad (8-2)$$

取  $A=100 \times 100 (\text{m}^2)$ ,  $d=0.02\text{m}$ ,  $h=0.8\text{m}$ ,  $b=\sqrt{\frac{A}{\pi}}=56.42\text{m}$ , 代入公式 (8-1) 和公式 (8-2),

得  $R_1=0.435\Omega$ ,  $R_2=0.734\Omega$ 。

由此可以看出,即使将地网内全部铺满钢材,接地电阻只要下降  $\frac{0.734-0.435}{0.734}=41\%$ 。

这是因为,内部的钢材被四周的轮廓所屏蔽,电流绝大部分是由四周的轮廓散出的缘故,可见,在地网内铺设很多钢材,对降低接地电阻的效果是不大的。

由于  $R_1$  和  $R_2$  相差不太大,故估算实际的网状接地极的接地电阻时,可在  $R_1$  基础上加修正项  $\Delta R$  的方法,略去埋深  $h$  的影响,将公式 (8-1) 简化为:

$$R_s = \frac{\rho}{4b} = \frac{\sqrt{\pi}\rho}{4\sqrt{A}} = 0.44 \frac{\rho}{\sqrt{A}}$$

这样, 实际网状接地极的接地电阻可按  $R = 0.44 \frac{\rho}{\sqrt{A}} + \Delta R \approx 0.44 \frac{\rho}{\sqrt{A}} + \frac{\rho}{L}$  估算。式中,  $L$  为接地体 (包括水平与垂直) 的总长度;  $0.44\rho/\sqrt{A}$  为面积为  $A$  的金属板的接地电阻;  $\rho/L$  为考虑到实际地网。

不是金属板而引入的修正项, 它比前一项要小很多, 上式也可进一步简化为  $R \approx 0.5\rho/\sqrt{A}$ , 也就是说, 当  $\rho=100\Omega\cdot\text{m}$  时, 为获得  $0.5\Omega$  的接地电阻, 接地网的面积  $\geq 100\times 100(\text{m}^2)$ 。

### (2) 人工接地体。

对于接地电阻而言, 直线或工频电流流过时的电阻称为工频接地电阻 (接地电阻)。按其性质可分为人工接地体和自然接地体两类。

人工接地体通常是由垂直埋设的棒形接地体和水平接地体组合而成。棒形接地体可以利用钢管、槽钢、角钢等制成。水平接地体可以利用扁钢和圆钢等制成。

#### ① 垂直接地体。

单根垂直接地体, 当  $l \gg d$  时,

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{4l}{d} (\Omega)$$

式中,  $l$ —接地体的长度, 单位是  $\text{m}$ ;

$d$ —接地体的直径, 单位是  $\text{m}$ 。其中角钢做接地体, 则  $d=0.84b$  ( $b$  为角钢每边宽度); 如果用扁钢, 则  $d=0.5b$  (扁钢的宽度)。

当单根垂直接地体的接地电阻不能满足要求时, 可以采用多根垂直接地体并联方式, 几根并联后总的接地电阻并不是单根接地电阻  $R$  的  $1/n$ , 而是要更大一些, 这是因为它们相互屏蔽的缘故, 此时  $R_0 = \frac{R}{n\eta}$ , 式中  $\eta \geq 1$ , 叫做利用系数。当相邻接地体之间的距离为接地体长度的两倍时,  $\eta$  值为  $0.9$  (两根并联时) 或  $0.7$  (六根并联时)。

#### ② 水平接地体。

$$R = \frac{\rho}{2\pi L} \left( \ln \frac{L^2}{dh} + A \right)$$

式中,  $R$ —水平接地体电阻, 单位是  $\Omega$ ;  $L$ —接地体总长度, 单位是  $\text{m}$ ;  $d$ —水平接地体的直径或等效直径, 单位是  $\text{m}$ ;  $A$ —形状系数。

#### ③ 以水平接地体为主, 且边缘闭合的复合接地体的接地电阻:

$$R_w = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \times \frac{\rho}{\sqrt{S}} + \frac{\rho}{2\pi L} \ln \frac{L^2}{1.6dh \times 10^4}$$

式中,  $R_w$ —复合接地体的接地电阻, 单位是  $\Omega$ ;  $S$ —接地网的总面积, 单位是  $\text{m}^2$ ;  $L$ —接地体的总长度, 包括垂直接地体在内, 单位是  $\text{m}$ ;  $d$ —水平接地体的直径或等效直径, 单位是  $\text{m}$ ;  $h$ —水平接地体的埋设深度, 单位是  $\text{m}$ 。

#### ④ 其他人工接地体工频接地电阻的估计, 计算公式如表 8-1 所示。

表 8-1 其他人工接地体工频接地电阻的估算式

接地体型式	估算式	备注
垂直式	$R \approx 0.3\rho$	长度 3m 左右的接地体
单根水平式	$R \approx 0.03\rho$	长度 60m 左右的接地体
复合式接地网	$R \approx 0.5 \frac{\rho}{\sqrt{S_{\Sigma}}} = 0.28 \frac{\rho}{\gamma}$ 或 $R \approx \frac{\rho}{4\sqrt{\frac{S_{\Sigma}}{\pi}}} + \frac{\rho}{l_{\Sigma}} = \frac{\rho}{4\gamma} + \frac{\rho}{l_{\Sigma}}$	$S_{\Sigma}$ 为大于 100 m <sup>2</sup> 的闭合接地网的总面积； $r$ 为与 $S_{\Sigma}$ 等值的圆的半径（m）； $l_{\Sigma}$ 为接地体的总长度（m）

### （3）自然接地体工频接地电阻的估计。

在接地工程中，充分利用混凝土结构物中的钢筋骨架，金属结构物，以及上下水管道等自然接地体，是减少接地电阻，节约钢材以及达到均衡电位接地的有效措施。常见架空输电线路塔杆的人工和自然接地电阻见表 8-2。

表 8-2 常见架空输电线路塔杆接地电阻简易计算式

接地装置型式	杆塔型式	接地电阻简易计算式
$n$ 根水平射线（ $n \leq 12$ ；每根长约 60m）	各型杆塔	$R \approx \frac{0.062\rho}{n+1.2}$
沿装配式基础周围敷设的深埋式接地体	铁塔	$R \approx 0.07\rho$
	门型塔杆	$R \approx 0.04\rho$
	V 型拉线的门型塔杆	$R \approx 0.045\rho$
装配式基础的自然接地体	铁塔	$R \approx 0.1\rho$
	门型塔杆	$R \approx 0.06\rho$
	V 型拉线的门型塔杆	$R \approx 0.09\rho$
钢筋混凝土杆的自然接地体	单杆	$R \approx 0.3\rho$
	双杆	$R \approx 0.2\rho$
	拉线单、双杆	$R \approx 0.1\rho$
	一个拉线盘	$R \approx 0.28\rho$
深埋式接地与装配式基础自然接地的综合	铁塔	$R \approx 0.05\rho$
	门型塔杆	$R \approx 0.03\rho$
	V 型拉线的门型塔杆	$R \approx 0.04\rho$

## 8.3 降低接地电阻的方法和措施

随着电力系统电压等级的不断提高和系统容量的不断增大，接地故障电流和发电厂、变电站接地网的面积都在不断增大，为保证电力系统的安全可靠运行，要求接地网的目标电阻值也越来越小。若接地电阻不达标，当系统发生故障时，可能会引起和造成事故扩大，导致系统停运、设备损坏的实例。为了避免由地网反击电压和地下杂散电流产生的地网杂散电位对计算机监控系统、微机保护、自动控制等装置的损坏和干扰，需将发电厂、变电站的工频接地电阻降低到规定值。如果接地网接地电阻不合格，当电力系统发生接地短路故障时，短路电流可能使接地网电位升高而反击二次电缆，甚至通过二次电缆串入控制室以致烧坏二次设备及有关设施。然而，变电所一般都建在山包或者其他土壤电阻率较高的地区，此外，市区的变电所也已逐渐向 GIS 发展。GIS 的占地面积非常小，如何采用降阻剂、采用神经压力灌注接地、爆破接地、外引接地、离子型接地电极等措施，使占地面积较小的变电所的接地

电阻达到规程要求，以及如何在地质条件差、土壤电阻率较高的地区，经济有效地降低接地网的接地电阻，改善地表电位分布是摆在设计工程师面前的重要课题。目前，在接地网降低接地电阻的研究领域，已经取得了很多成绩。

### 8.3.1 降阻材料应用及接地极防腐措施

#### 1) 接地材料及存在的问题分析

目前使用的降阻材料有降阻剂、接地模块、电解离子接地极等，并已经在工程中得到了较为广泛的应用。

降阻剂通常以对金属有较强亲和力的胶凝物为基料，凝固后形成立体网状结构，在其中加入一些导电的颗粒，化学降阻剂以电解质导电为主体，而物理降阻剂则以非电解质粉末如木炭、石墨及金属粉末为导电材料。

降阻剂的降阻机理一般有以下几个方面。

(1) 随着降阻剂的扩散和渗透作用，降低接地体周围的土壤电阻率。

(2) 扩大了接地体金属接地体的有效截面，增大与土壤的接触面积，降低了接触电阻。

目前对降阻剂在工程应用中反应最为强烈的有以下问题：

① 对接地体的腐蚀问题。降阻剂虽然短期内起到一定的降阻作用，但降阻剂对金属接地体均存在不同程度的腐蚀性，尤其是包裹降阻剂的地线与未包裹部分的交接部位会产生严重的电化学腐蚀。

② 降阻剂稳定性与长效性问题。部分厂家追求短期的降阻效果，加入了大量的无机盐类，但随着电解离子迅速流失而失去降阻效果，地网接地电阻迅速反弹回升。

#### 2) 接地模块

接地模块也是目前常用的一种降阻材料，它是一种以非金属材料为主体的接地体，它由导电性、稳定性较好的非金属矿物质和电解物质组成。

经过市场调研，目前国内市场的接地模块产品材料成分与降阻剂相似，是把降阻剂事先预制成不同形状模块，使用时直接埋设并与接地干线可靠连接。所以，接地模块存在的问题与降阻剂基本相同。

#### 3) 电解离子接地极

电解离子接地及时在管状接地体内部加入负离子填充剂，作为一个离子发生装置，产生的离子不断扩散到周围的土壤中，从而达到接地降阻要求。填充剂有良好的渗透性能，深入到泥土及岩缝中，形成树根网状，增大了泄流面积。

目前电解离子接地极的市场价格较高，每根（长 2.5~3.0m）约 1 万元人民币，并且由于电解离子接地极依靠释放离子来实现降阻，其长效性难以保证，同时也增加了土壤对接地体的腐蚀作用。

综上所述，各种降阻材料最大的问题是长效性和对金属接地体的腐蚀作用，设计中要慎重选择降阻材料，不仅考虑短期的降阻效果，更要保证长期的可靠性。

电力系统曾经对各地运行 10 年以上变电站地网开挖检查，发现接地导体腐蚀较为严重。目前变电站设计运行年限不小于 30 年，地网寿命周期也应与之一致。因此需对地网采用适当的防腐措施，常用的方法主要有采用铜质接地材料、导电防腐涂料、牺牲阳极法和外加电源法等，以上方法在国内电力工程领域已有采用。



### 8.3.2 降低接地电阻的物理和化学方法

为降低接地装置的接地电阻,保证电力系统的安全可靠运行,可以从物理和化学两个方面入手进行考虑。

#### (1) 物理方法降阻。

物理方法降阻主要有:①更换土壤。采用电阻率较低的土壤,如粘土、黑土及砂质粘土等替换原有电阻率较高的土壤,置换范围在接地体周围以内。②深埋接地极。当深处土壤电阻率较低或有水时可采取该方法来降低接地电阻,尤其是对含砂土壤,效果明显。③伸长水平接地体。如果附近有导电良好土壤、河流和湖泊等可采用该方法,但延伸达到一定长度后即使再增加接地体长度接地电阻也不再明显下降。④三维立体接地网、爆破接地、深孔压力灌注。

#### (2) 化学方法降阻。

化学方法降阻主要有:①人工处理土壤。在接地体周围土壤中加入某种化学物质,如食盐、木炭、炉灰、氮肥渣、电石渣、石灰等,提高接地体周围土壤的导电性。②使用特殊降阻剂。将降阻剂施于金属接地体周围,降阻剂分为化学降阻剂和物理降阻剂,现在广泛接受的是物理降阻剂。③使用高导活性离子接地单元。

上述每种方法都有其适用的范围,在实际的接地工程中,应根据现场的实际情况,综合采用。

### 8.3.3 高阻区降低电阻的措施

高阻区是指土壤电阻率 $\rho > 500\Omega\cdot\text{m}$ 的地区。这些地区主要是砂、砾石、岩石等较多的旧河床或山区,土层薄,水分流失快。干旱季节土壤电阻率更高。设计时应根据需要,合理利用当地条件和高土壤电阻区的接地,一般有以下降低接地电阻的措施。

#### (1) 换土。

若遇接地处是岩石、砂、砾等或周围条件限制不能延伸接地,可考虑换土。即用低土壤电阻率的粘土、黑土等替换电阻率较高的土壤。水平接地极和垂直接地极均可采用换土来减少接地电阻。

#### (2) 利用降阻剂。

接地电阻降阻剂是由多种化学物质配制而成的。目前,国内降阻剂产品的类型、电性能虽然不尽相同,但其降阻机理有着相似之处。在接地极周围敷设降阻剂后,可增大接地极外心尺寸,降低与周围大地土壤之间的接触电阻,因而能在一定程度上降低接地极的接地电阻。降阻剂用于小面积的集中接地,如杆塔接地和防雷接地等小型接地装置。

#### (3) 深埋接地极。

若地表土壤或岩层不很厚,下层有地下水或低电阻土壤,可钻井深埋或开挖深埋接地极,从而降低接地电阻值。

#### (4) 利用水及与水接触的钢筋混凝土。

充分利用水工建筑物(水井、水池等)以及其他与水接触的金属部分作为自然接地体,可在水内钢筋混凝土结构物内绑扎成的许多钢筋网中,选择一些纵横交叉点加以焊接,并与接地网连接起来。

当利用水工建筑物作为自然接地体仍不能满足要求时,应优先在就近的水中敷设外引(人工)接地装置(水下地网)。水下接地装置应敷设在水的流速不大之处或静水中,并要回填一

些大石块加以固定。水下接地网的接地电阻可按式计算

$$R=0.025 \rho_s K(\Omega)$$

式中,  $\rho_s$ —水的电阻率, 单位是  $\Omega \cdot \text{m}$ ;

$K$ —接地电阻电阻系数。

为了降低接地体周围的电阻率, 可将无腐蚀性的污水引到埋设接地体处。接地体采用钢管, 在钢管上每隔 20cm 钻一个直径为 5mm 的小孔, 使水渗入土壤中。

实际工程中, 应根据实际情况加以变通, 采取相应的方法与措施, 保证工作顺利进行。

### 8.3.4 变电站接地网的特殊降阻措施

变电站敷设了复合式接地网后, 接地电阻依然不能满足技术要求时, 需增加常规的降阻措施。所谓常规的措施是指可以由原土建施工单位完成的在变电站征地范围内的一般降阻措施, 而特殊的措施通常是在常规措施也无法达到降阻要求时使用的, 且施工方必须是有经验的防雷接地的专业施工队伍。根据电力行业标准推荐的降阻措施的指导思想以及供电局运行单位及生技部门的意见, 变电站接地网的常规降阻措施都是在征地范围内进行的, 主要是敷设填充降阻剂的水平接地沟和水平接地网边缘增加填充降阻剂的接地深井。

对于变电站大型接地网的降阻措施, 接地线外引扩网是最有效的方案, 但是由于大部分的变电站站址周围的环境带有不确定性, 很多地块近期就要被开发利用, 假设站址附近有农田, 接地网外引至农田也是难以实施的。一是与农民商量征地赔偿极其烦琐和困难, 二是安全性方面考虑, 担心在站内设备发生接地短路或雷击时, 在外延接地的农田会产生危险的跨步电压对人员造成伤害。因此在大部分变电站工程中, 运行、工程等部门和监理单位都不同意接地网往征地红线外引接地线的扩网做法。这样一来, 常规降阻措施降阻的效果就十分有限了, 在一些土壤电阻率偏高的场地, 常规降阻也无法达到要求, 此时需考虑使用特殊的降阻措施。变电站的接地网使用过的特殊降阻措施主要有两种: 爆破接地技术和斜井降阻技术。

#### (1) 爆破接地技术。

其基本原理是采用钻孔机在地中垂直钻直径为 100mm, 深度为几十米的孔, 在孔中布置接地电极, 然后沿整个深度隔一定的距离安放一定量的炸药来进行爆破, 将岩石爆裂、爆松, 接着用压力机将调成浆状的物理性降阻剂挤压入深孔及爆破制裂产生的缝隙中, 以达到通过降阻剂将地下巨大范围内的土壤内部沟通, 加强接地电极与土壤、岩石的接触, 从而达到较大幅度降低接地电阻的目的。采用爆破制裂压力灌降阻剂法, 降低接地电阻的原理大致可归纳为:

- ① 利用地下电阻率较低的土壤层、地下水层及金属矿物层来改善散流;
- ② 物理型降阻剂可以很好地与接地极及各种类型土壤、岩石形成良好的接触, 达到降低接地电阻的效果;
- ③ 在大范围内降低土壤电阻率, 从而降低土壤的散流电阻;
- ④ 通过爆破制裂形成的裂缝可将岩石中固有的节理裂缝贯通, 压力灌降阻剂形成一个低电阻率通道, 贯通的固有裂缝可通向较远的土壤中, 与土壤低电阻率区域相连;
- ⑤ 在压力灌降阻剂后, 形成的填充了降阻剂的通道, 它有利于电流通过裂缝中的降阻剂散流到外部岩层, 也可以通过裂缝散流到电阻率较低或有地下水及金属矿物质的地层, 从而有利于接地极或接地网的散流。

由以上降阻原理可知,爆破技术比较适合于深层为在砂岩、花岗岩等地质十分硬实的地质结构,深层土壤电阻率远高于上层土壤的电阻率,此时使用普通的接地深井降阻,由于没有低电阻率的地下层,作用是很小的。而爆破接地技术对此就具有很强的互补性,在变电站有限的征地面积范围内巧妙地利用三维立体空间的延伸,从而达到扩大接地网水平面积的同等级效果。目前全国不少发变电站及输变电项目有采用此技术,具有比较丰富的使用经验。但是,使用爆破接地深井的费用比较昂贵,所以通常在土壤电阻率达到  $1000\Omega\cdot\text{m}$  以上的岩石地貌,接地网设计、施工十分艰难时才会使用。

### (2) 斜井降阻技术。

其基本原理是通过非开挖技术,将接地极从站内的主接地网边缘,沿着变电站的进站道路和线路终端塔外引至站外电阻率较低的地区,达到理想的扩网效果。由于斜井里的接地极是埋设在道路或架空线地下几米深的土壤中,不会遭遇外部破坏和产生危险的跨步电压,这种外引措施也免除了重新征地带来的各种麻烦。

斜井的具体实施过程是:

① 根据周围的地质情况,确定斜井的数目及延伸的方向、敷设的长度、钻头入土的角度、埋设深度,使其可以避开地下管网到达预定地点。

② 钻斜井过程中,以钻井方向控制按侧力纠偏原理由计算机指挥,可以随时进行修正。

③ 钻头在预定位置处钻回地面,将  $\phi 16$  热镀锌圆钢固定在出土的钻头上,利用  $\phi 160$  扩孔器和分动器回拉圆钢入斜井中。拉圆钢的同时,利用柴油机水泵将物理型降阻剂高压泵向钢管中注入泥水,以减小钻头的阻力。降阻浆通过钻杆灌入斜井中。一边拉,一边灌,匀速卸下钻杆,使降阻剂浆均匀灌满在斜井中,并充分渗透到深层土壤和石缝里,改良其土壤电阻率,实现降低电阻的最佳效果。

斜井降阻技术具有良好的适用性,因为绝大部分土壤电阻率偏高的砂土、岩石等地质结构的变电站站址都处在郊外,变电站 110kV、220kV 的电源基本是架空线进的,这就保证了站外有架空线行可以利用,另外每一个变电站由于设备运输的需要必然是由主道路经过的。斜井降阻技术从经济性也具有一定的优势,在大型接地网的降阻措施中外引同样长度的接地线比增加垂直方向的深井更为有效的。

### 8.3.5 深孔压力灌注接地降阻

在城市中,考虑直接扩大变电站接地网面积往往受站区四周场地的限制,特别是城市户内变电站布点困难,周围常有住宅、公建等设施。此时,可优先考虑深孔压力灌注接地。深孔压力灌注采用深井式垂直伸长接地装置,是在水平接地网相连,形成立体地网。它具有以下三个特点:①地中深层接地电阻稳定,不受季节变化;②散流能力强,特别是对高频雷电流作用明显;③金属材料不易氧化等。故逐渐被广泛应用。

#### (1) 单根垂直接地极。

单根垂直接地极插入均匀电阻率的土壤时,其上流过的绝大部分电流分布在直接围绕接地极的土壤层中。因此可以认为每条电流线都是从接地极出发垂直其表面,并在电场作用下,以半球形向地阻抗土壤中扩散。这样,在接地极四周形成了一散流通道,其散流值取决于该通道的接地电阻值,单根垂直接地极的接地电阻  $R$  为:

$$R = \frac{\rho}{2\pi L} \ln \frac{4L}{d}$$

式中,  $\rho$  为土壤电阻率, 单位是  $\Omega \cdot \text{m}$ ;  $L$  为垂直接地极长度, 单位是  $\text{m}$ ;  $d$  为接地极直径, 单位是  $\text{m}$ 。

单根接地极采用深孔分层压力灌注法, 是在单孔成孔时, 现场了解孔中的分层情况和岩石破碎情况, 计算出孔隙率, 再根据所需要接地电阻值考虑所需压力的作用下降阻剂的填充范围。

降阻剂注入接地极时呈液态, 具有很强的渗透性, 渗透到土壤和岩石的孔隙中, 这就使接地体增加了一束束电阻率很低的被注入土壤周围和岩石孔隙中伸展的根须状连续胶体, 就像在接地极四周装上了千百条导电毛刺。接地体依赖这些根须提高了接地体的散流能力, 这相当于增大了接地体的有效体积, 从而降低了接地体的接地电阻。这种现象被称为“树支效应”, 它不但扩大了散流的广度, 还扩大了散流的深度, 其范围以单根垂直接地体为中点不等边地向四周扩散。地中的矿物质、地下水和溶洞等低电阻率土壤层均会使接地电阻大大降低。

#### (2) 立体接地网。

接地网的最大强度产生于垂直接地极顶端, 将多个垂直接地极连接起来, 便在地面的深层处形成散流的接地网, 称为立体地网。半球形接地体的接地电阻为:

$$R = \frac{\rho \varepsilon}{C} = \frac{\rho}{2\pi r} \quad (8-3)$$

在立体地网中, 多个垂直接地极穿透了地网中许多不同电阻率的土壤层, 因而土壤电阻率不再均匀, 且许多个垂直接地极之间也存在着屏蔽效应, 所以立体接地网的接地电阻为:

$$R = \frac{\rho_{oi}}{2\pi L_{oi}} \cdot K_p \quad (8-4)$$

式中,  $L_{oi}$  为立体接地网的等效半径;  $\rho_{oi}$  为等效土壤电阻率;  $K_p$  为屏蔽系数。

当多个垂直接地极间距大于单个垂直接地极长度的 2 倍时, 其屏蔽系数为最小。

通常, 在高土壤电阻率及不能用常规方法埋设接地装置的地区, 采用深孔与主接地网并联是一种有效的降低接地电阻的方法。常规的深孔接地极是一种最简单的长垂直接地极, 是短垂直接地极在长度方面的一种延伸, 它主要利用下列因素提高降阻效率: 增加接地极的长度  $L$ ; 利用电阻率较低的深层土壤, 来降低土壤的平均视在电阻率  $\rho$ ; 在接地极周围形成低电阻率材料的填充区, 相当于增大了接地极的等效直径  $d$ 。

在有地下含水层的地方, 接地体可能深入穿透水层, 这时降阻效果将更好, 此时可采用深水孔接地方式。它可利用自身的结构形式聚积地下水的空间和地下水运动通道, 从而改变了接地极周围土壤的地下水分布, 人为地增加接地极周围土壤湿度, 降低这部分土壤的电阻率。

深孔接地不受气候、季节条件的影响; 深孔接地除了降阻以外, 还可以克服场地窄小的缺点, 这在城市和山区是一种行之有效的办法。常规的深孔接地适用于土壤均匀, 或上层土壤厚度小、下层土壤电阻率很小的土壤结构分层的地区。而深水孔接地极适用于有一定地下水含量、透水能力强、空隙度大的土壤, 更适用于土壤分层结构、在各层土壤中有一层是明显含水层或隔水层的地区。

## 8.4 接地网故障诊断字典法

在实际工程中, 当接地网发生故障或接地电阻测试不满足要求时, 常用的方法是在接地网周围增加焊接金属导体, 增加接地网面积来降低接地网电阻, 以满足工程要求。这种检测

和维护的方法虽然能满足工程要求,但有时也受到周围环境条件的限制,同时也浪费了金属材料,增加了维护费用。

此外,由于接地网埋于地下具有的隐蔽性,工程上对地网接地性能好坏的检测一般通过接地电阻的大小来间接判断,但不能了解接地网的腐蚀和断点情况,即使地网导体出现腐蚀和断点,接地电阻仍可能还处于正常状况。所以,过去一般都是在发现地网接地电阻不合格或发生地网引起的事故后,通过大面积开挖来查找接地网断点和腐蚀段,但这种方法具有盲目性、工作量极大、速度慢、受现场运行限制等缺点。下面介绍一种常用的接地网故障诊断的字典法。

### 8.4.1 字典法故障诊断介绍

故障字典法历史悠久,如在各种电子设备的说明中通常有故障检修一章,它将常见故障列成表,指导维修人员进行检修,这个故障检修表就是一种最原始的故障字典。

故障字典法在电子计算机发明后迅速发展,如同建立数据库一样,可以将各种故障症状储存在计算机的记忆设备中,在发生故障时,不必依靠人工,而是全自动地从库中检索出各种故障特征,加以比较和判断,然后确定故障性质和地点。

目前,国内外学者提出了许多故障诊断方法,其中故障字典法是很有实用价值的方法。它的基本思想是:首先提取电路在各种状态下的电路特征,然后将特征与故障的一一对应关系列成一个字典。在实际诊断时,只要获取电路的实时特征,就可以从故障字典中查出此时对应的故障。故障字典法属于测前模拟诊断,即对电路的仿真在现场测试之前实施,易于进行实时诊断。

建立字典的过程,实际上是测试前的分析过程,它主要完成故障集的选择、激励信号的选择、故障特征模糊域的分割和隔离、故障特征码的生成等工作。

#### (1) 故障集的选择。

选择故障集实际上是确定接地网中经常性或易发生故障的接地支路。接地网的故障一般都只考虑接地网中的导体断裂或者被腐蚀等。由于接地网中导体数较大,多故障的组合数也很大,因此罗列所有多故障作为故障集是不现实的。研究表明,接地网导体故障一般是单支路故障或者是双支路同时发生故障的情况较为突出,故在实际工程中,通常是根据被测接地网的特点和以往的经验及导体故障概率来选择若干单支路故障和双支路故障作为故障集。

#### (2) 可测试点的选择。

可测试点选择的基本条件是:

① 可用于测试的接地极;

② 接地极的电压对接地网中的参数变化时的灵敏度不为零,且任意两个独立故障同时发生时,该接地极上的电压变化值不会互相抵消。

由于习惯上将对网络作一次激励时在各可及端点测得的 $n$ 个电压值列成一个 $n$ 维列向量,因此也可以看作尽可能选择维数最低的测试向量来区分(隔离)故障集中的所有故障。实际的做法是根据以往的经验选择可获得故障信息量最多的节点(或者多选取一些节点),先将故障集中的故障予以隔离,然后再在仍保证故障可隔离的前提下优选出较佳(即尽可能少)的节点作为实际使用的测试节点。

#### (3) 故障字典的建立。

如果已经找到若干测试点和激励信号,它们生成的模糊集已经足以隔离出故障中所有故

障（或区分故障已达到满意的程度），则可以将每个模糊域的中心值储存起来，构成字典。一般来说，其中某些模糊集（域）在隔离故障时或之前是多余的，在建立字典时可以将它们舍去，即储存尽可能少的模糊集，这样可减少计算机的储存容量，同时也可以加快实际诊断的计算速度。

研究表明，接地网故障大多是单支路故障或者是双支路故障（断裂或者一定程度上的腐蚀）。假设某接地网有  $n$  个独立节点， $b$  条支路，则单支路故障有  $b$  种情况，双支路故障有  $C_b^2$  种情况。鉴于本文的篇幅有限，本文仅建立接地网单支路故障“字典”，对于双支路故障，由于数据量较大，仅选取一些故障概率较大的情况作为代表。

#### （4）接地网故障诊断字典法的理论判据。

如图 8-1 所示，是一个具有  $n$  个节点的电力系统接地网平面图。假设接地网中各金属导体之间的焊接点称为接地网的节点，焊接点与焊接点间的导体称为接地网的支路，即可把接地网视为由  $n$  个独立节点， $b$  条支路构成的网络，略去电感和电容的影响，整个接地网可视为一个等效的纯电阻网络。如果接地网中的节点满足下列条件，可选作为可测试点：

① 可用于测试的端点；

② 接地网的节点电压对参数变化的灵敏度不为零（当接地网任一支路发生故障时，在该接地极上的测试信号不为零），且任意两个独立故障同时发生时，该节点上的电压变化值不会互相抵消。

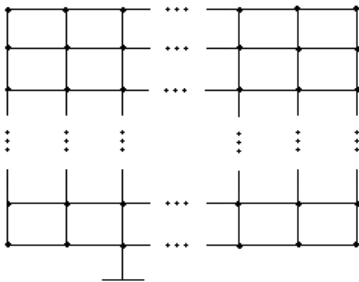


图 8-1 接地网连接示意图

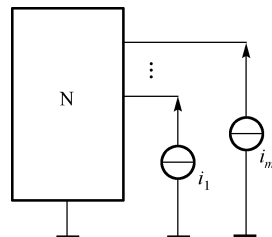


图 8-2 接地网等效电路图

假设在第  $m$  ( $m < n$ ) 个可测试点处施加适当的电流源激励如图 8-2 所示。并略去电感和接地网分布电容的影响，则接地网可等效为一纯电阻网络，其节点电压方程为：

$$Y_{n0} \cdot U_n = J_m \quad (8-5)$$

式中， $U_n$  为接地网节点电压向量； $Y_{n0}$  为无故障时网络节点导纳矩阵； $J_m$  为在  $m$  ( $m < n$ ) 个可及测试点上施加的电流源激励向量，三者均为已知量。令：

$$U_n = [U_m \quad U_l]^T$$

式中， $U_l$ 、 $U_m$  分别表示接地网不可及测试点和可测试点电压向量。则公式 (8-5) 可写作：

$$\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_m \\ U_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8-6)$$

由公式 (8-6) 展开可得：

$$Y_1 U_m + Y_2 U_l = J_m \quad (8-7)$$

$$\mathbf{Y}_3 \mathbf{U}_m + \mathbf{Y}_4 \mathbf{U}_l = 0 \quad (8-8)$$

公式(8-7)、公式(8-8)消去内节点得到可及测试点电压方程:

$$\mathbf{Y}_{pp} \cdot \mathbf{U}_m = \mathbf{J}_m \quad (8-9)$$

式中,  $\mathbf{Y}_{pp} = \mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2 \mathbf{Y}_4^{-1} \mathbf{Y}_3$ , 为等效导纳矩阵。当网络无故障时,  $\mathbf{Y}_{pp}$  为已知量, 可由公式(8-9)直接计算可及测试点的电压  $\mathbf{U}_m$ ; 当网络出现故障时,  $\mathbf{Y}_{pp}$  因其参数改变而成为未知量,  $\mathbf{U}_m$  不能再由公式(8-9)获得, 但在可及测试点外加电流源激励可通过接地网的外露测试点直接测得。

判别接地网故障(接地网支路被腐蚀或漏焊、断裂等)通常是用可及测试点的测量值与无故障时的计算值进行比较, 如果选择的可及测试点满足上述对可及测试点的假定条件, 则这种判别方法是有效的。即接地网故障的判据是:

$$U_{mi} \neq U_{mi}^{(0)} (i=1, 2, 3, \dots, m) \quad (8-10)$$

式中,  $m$  表示接地网可及点的数量;  $U_{mi}$  表示第  $i$  个可及点的电压测量值;  $U_{mi}^{(0)}$  表示第  $i$  个可及点无故障时的计算值。

**证明:** (1) 必要性。

接地网无故障时, 由公式(8-5)解出可及点的电压计算值  $U_{mi}^{(0)} (i=1, 2, 3, \dots, m)$ , 关系为:

$$U_{mi}^{(0)} = \xi(h_0 + \Delta h_0, I_m) \quad (8-11)$$

式中,  $h_0$  表示接地网元件参数标称值关系函数;  $\Delta h_0$  是土壤对接地网电阻值影响函数, 亦即, 土壤电阻率以及接地体的埋设状态都会影响接地网的阻值, 采用影响函数系对接地网中各支路的电阻  $R_{i0}$  进行修正。即

$$R_i = \beta R_{i0}$$

$$\beta = \rho L + \gamma$$

式中,  $\rho$  是土壤电阻率;  $L$  是接地导体的长度;  $\gamma$  是接地体的埋设深度,  $\gamma$  的取值与接地体的埋设深度成反比, 一般  $\gamma$  取值在 0.45~0.87 之间;  $I_m$  是在可及点上施加的电流源激励, 它们都是已知值,  $U_{mi}^{(0)}$  的值也可以由公式(8-9)计算获得。

如果要判断接地网是否发生故障, 是在同一可及点上施加与理论计算时大小相同的电流源激励, 即可及点的电压测量值  $U_{mi}$  的关系函数表达式为:

$$U_{mi} = \xi(h, I_m) \quad (8-12)$$

公式(8-12)表示接地网络元件参数当前实际值的关系函数, 它是一个未知量。

当接地网发生故障时, 则有  $h \neq h_0 + \Delta h_0$ , 由公式(8-11)和公式(8-12)比较可知, 可及点的电压测量值一定不等于无故障时的电压计算值, 亦即  $U_{mi} \neq U_{mi}^{(0)}$ 。

若接地网无故障, 即  $h = h_0 + \Delta h_0$ , 由公式(8-11)和公式(8-12)比较, 则有  $U_{mi} = U_{mi}^{(0)}$ 。

(2) 充分性。

在接地网中选择的可及点满足定义基本条件(当接地网参数发生变化时, 可及点上的电压测量值不为零), 只要  $U_{mi} \neq U_{mi}^{(0)}$ , 由公式(8-11)和公式(8-12)比较, 即有  $h \neq h_0 + \Delta h_0$ , 则接地网必有故障。同理, 根据可测试点的基本条件, 接地网中的节点电压对参数变化的灵

敏度不为零，且任意两个独立故障同时发生时，在这一节点上电压的变化值不会互相抵消。若测试点的电压  $U_{mk}=U_{mk}^{(0)}$  时，即有  $h=h_0+\Delta h_0$ ，则接地网必无故障。

8.4.2 字典法故障诊断仿真示例

如图 8-3 所示，某电力系统接地网示意图有 35 个独立节点（节点和支路编号如图所示），60 条支路，均压导体非均匀分布，垂直导体的间隔距离分别是：8m、13m、19m、13m、8m，水平导体的间隔距离分别是：7.5m、12.5m、18.5m、12.5m、7.5m。单位导体电阻为  $0.46\times10^{-2}\Omega/\text{m}$ ，接地网中各导体导纳值如图中标示。若选择接地网中的接地极 3、8、9、16、21、25、30、34 作为可测试点，在接地极 18 和参考节点之间外加 10A 的直流电流源激励。

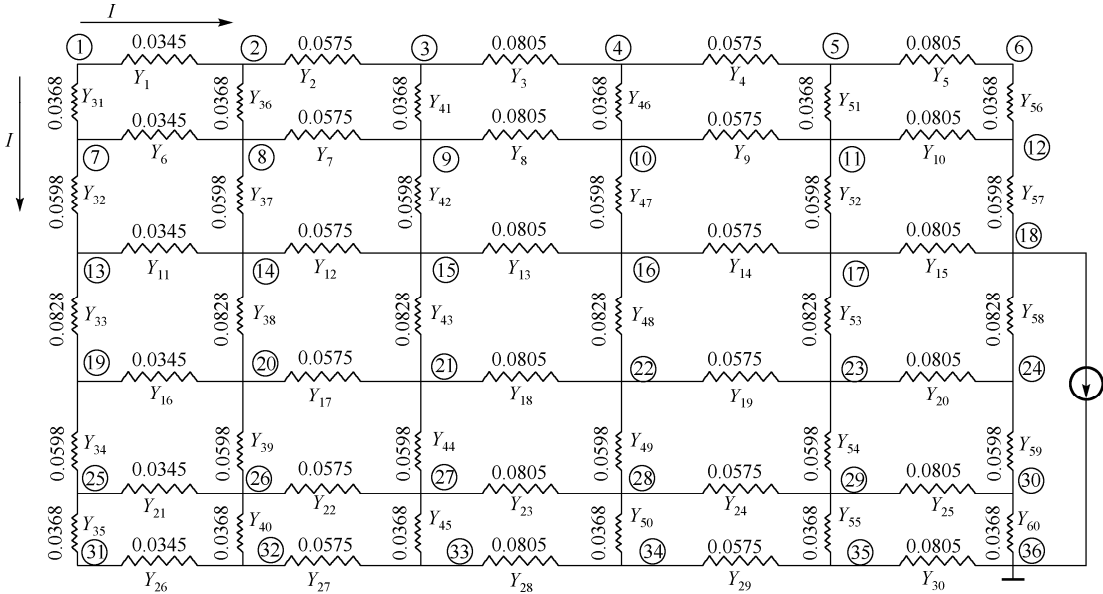


图 8-3 接地网示意图

单支路故障字典法仿真

假设接地网单条支路分别发生断裂，应用文中提出的字典法进行故障仿真诊断。首先，用公式（8-1）计算得出接地网无故障时各可测试点的电压值，然后分别对每条支路断裂故障进行模拟仿真，分别求出可测试点的电压测量值，结果见表 8-3。

表 8-3 单故障仿真结果列表

可测点 电压 故障情况	$U_3$	$U_8$	$U_9$	$U_{16}$	$U_{21}$	$U_{25}$	$U_{30}$	$U_{34}$
正常情况	2.44	-3.9597	2.6120	-9.7796	-35.5843	6.6309	-90.6000	-63.1432
Y1 断裂	2.2645	-4.0329	2.5394	-9.8568	-35.6861	6.5262	-90.7176	-63.2205
Y2 断裂	13.6004	2.0084	8.5064	-6.1912	-32.3570	10.4997	-85.9119	-56.6408
Y3 断裂	1.4492	-3.9062	2.2514	-9.6942	-35.5298	6.7596	-90.5894	-62.9742
Y4 断裂	1.8718	-4.6137	2.0427	-10.2651	-35.9148	6.4651	-91.2340	64.0062



续表

可测点 电压 故障情况	$U_3$	$U_8$	$U_9$	$U_{16}$	$U_{21}$	$U_{25}$	$U_{30}$	$U_{34}$
Y5 断裂	3.0826	-4.1437	2.3055	-10.0531	-35.7922	6.5460	-91.0013	-63.4984
Y6 断裂	1.8569	-7.3841	1.8503	-10.5022	-37.1869	5.9082	-92.2498	-66.0814
Y7 断裂	2.5040	-2.7097	0.9236	-10.1203	-36.0710	6.8747	-90.7166	-62.9482
Y8 断裂	1.8856	-7.0409	3.5600	-12.3759	-38.4290	4.9478	-93.9199	-67.7220
Y9 断裂	2.5772	-4.9107	3.0119	-8.9761	-35.8333	6.2646	-90.3780	-62.6398
Y10 断裂	3.0352	-0.8065	4.0740	-10.0403	-35.0382	7.4858	-89.5630	-60.4939
Y11 断裂	2.4263	-3.6747	3.1015	-9.8580	-35.4635	6.7183	-90.4657	-63.0368
Y12 断裂	2.5310	-3.4485	1.8486	-10.4745	-36.3141	7.0065	-90.4275	-63.0859
Y13 断裂	2.9340	-5.1163	3.8982	-14.7982	-35.6419	6.7269	-95.2612	-66.3552
Y14 断裂	2.9755	-5.8632	1.7580	-13.5719	-34.6533	7.5601	-86.7045	-55.3536
Y15 断裂	3.0170	-2.8792	-2.3314	-10.5481	-34.9898	9.4908	-85.6512	-62.1691
Y16 断裂	2.1984	-4.4749	2.4304	-10.2034	-36.2434	6.3646	-91.2601	-63.7064
Y17 断裂	2.3138	-1.6852	5.1515	-8.8840	-25.0485	6.4626	-85.8721	-66.3622
Y18 断裂	2.8546	-3.0082	3.0070	-9.3736	-33.7694	7.2630	-90.2712	-64.2571
Y19 断裂	1.5526	-2.7733	-1.4914	-13.8322	-38.3477	6.9443	-91.1299	-61.1834
Y20 断裂	2.4422	-3.8873	2.4983	-9.7143	-35.5150	6.6388	-90.6975	-62.9786
Y21 断裂	2.0430	-6.0595	-3.8559	-14.4548	-41.2604	9.2539	-98.2367	-76.1635
Y22 断裂	3.2696	-4.6718	0.4111	-13.9720	-37.9332	9.7155	-93.7050	-68.0464
Y23 断裂	3.6238	-1.6358	4.2583	-15.1581	-33.4576	8.3428	-92.8694	-67.0944
Y24 断裂	2.7854	-2.3873	2.7311	-9.9869	-34.4941	7.1298	-91.4106	-60.3851
Y25 断裂	1.8921	-6.4265	1.8900	-7.4816	-36.1195	5.7535	-106.7625	-62.2927
Y26 断裂	3.5153	-1.4483	3.2726	-9.0995	-35.4237	9.1659	-91.4935	-66.2762
Y27 断裂	2.7452	1.2758	5.7859	-12.1172	-41.4283	8.1554	-98.1722	-92.1235
Y28 断裂	2.4479	-1.7822	2.5282	-6.9019	-33.7038	5.9330	-93.6554	-83.4588
Y29 断裂	1.1075	-3.9705	2.4829	-7.7763	-24.4768	3.7508	-103.1782	-32.9836
Y30 断裂	3.5946	5.0002	1.0739	-7.1722	-10.0219	5.9779	-138.3994	-8.8711
Y31 断裂	2.0684	-4.3468	2.9648	-9.3003	-35.6812	6.6685	-91.1487	-61.8027
Y32 断裂	2.2990	-4.1340	2.4928	-9.8046	-35.5977	6.6646	-90.6540	-63.3442
Y33 断裂	2.6936	-3.5034	3.1723	-9.4405	-35.9245	6.7192	-90.2321	-62.3545
Y34 断裂	-2.7974	-12.7756	-3.2059	-17.3417	-49.8811	1.6746	-101.0047	-76.6689
Y35 断裂	3.5153	-10.4483	3.2726	-9.0995	-35.4237	9.1659	-91.4953	-66.2762
Y36 断裂	3.8860	-4.5034	3.3012	-8.1389	-34.0704	8.7094	-89.6320	-61.9252
Y37 断裂	2.4341	-6.1330	2.3433	-9.9086	-36.2026	6.7718	-91.1105	-64.5891
Y38 断裂	2.4270	-3.9540	2.5349	-9.8219	-35.6844	6.5879	-90.6084	-63.1797
Y39 断裂	2.2122	-3.9863	4.2453	-11.1342	-36.3794	5.5948	-90.7412	-66.4155
Y40 断裂	1.0787	-4.7849	3.3265	-11.9499	-38.8403	3.8487	-93.2662	-73.7517
Y41 断裂	2.4856	0.3173	8.1409	-7.3838	-32.7487	9.9816	-86.9396	-59.4006
Y42 断裂	3.3615	-4.4492	6.8352	-11.0053	-38.0661	4.9995	-91.3990	-63.1357
Y43 断裂	3.5427	0.1685	4.7198	-8.1564	-40.9823	5.4927	-87.7723	-54.7836
Y44 断裂	2.4325	-3.9809	2.5941	-9.7829	-35.6620	6.6461	-90.6102	-63.1232
Y45 断裂	2.4082	-4.01441	2.2771	-9.0853	-34.6932	6.3655	-90.3183	-63.4354
Y46 断裂	4.1988	-0.1841	7.1174	-9.8204	-45.6813	11.6885	-90.4581	-59.8990
Y47 断裂	2.0358	-4.4635	2.1844	-10.8160	-36.1071	5.9558	-91.1853	-63.5337

续表

可测点 电压 故障情况	$U_3$	$U_8$	$U_9$	$U_{16}$	$U_{21}$	$U_{25}$	$U_{30}$	$U_{34}$
Y48 断裂	-0.3541	-12.2335	-0.0549	-1.4228	-39.8388	0.0126	-94.1947	-71.4646
Y49 断裂	2.2375	-4.0039	2.2824	-8.8980	-34.9332	6.3801	-90.9871	-64.7721
Y50 断裂	1.9912	-5.4501	2.6266	-11.0825	-33.1973	6.1556	-92.6708	-80.5846
Y51 断裂	2.1752	-5.4800	2.1752	-10.2911	-36.9616	6.2763	-91.5951	-64.9094
Y52 断裂	2.3563	-4.2315	3.1365	-7.9000	-36.7500	5.9773	-92.3029	-60.2358
Y53 断裂	2.0873	-4.2436	1.7389	-9.4636	-35.4608	6.2783	-92.3240	-64.8194
Y54 断裂	0.5716	-17.0927	-0.0493	-4.7729	-47.0597	3.9811	-120.8116	-92.9344
Y55 断裂	4.2660	-0.8532	2.2194	-11.0305	-38.6839	9.4985	-93.6018	-76.7874
Y56 断裂	2.5173	-3.5866	2.5573	-9.9023	-35.1995	6.8621	-90.4492	-62.2795
Y57 断裂	2.8060	-1.4032	8.7998	-7.8408	-42.9062	6.6390	-88.1271	-68.7850
Y58 断裂	5.2713	-4.9326	1.1341	-10.2646	-46.0756	11.0212	-119.7868	-62.3837
Y59 断裂	4.1212	1.0364	6.9901	-22.1108	-51.0533	11.0990	-255.3964	-105.0666
Y60 断裂	0.7396	-17.1125	4.8700	-13.6073	-73.1094	7.5896	-20.4315	-142.8133

表 8-3 是接地网发生单支路故障的各种情况。表中从第 2 列到第 9 列分别表示可测试点；第 2 行是接地网无故障时各可测点的电压值；从第 3 行到 42 行分别表示各支路发生故障。当接地网中的任意一条支路发生断裂故障时，根据可测点的电压测量值和故障判式（8-10）都可以从表中找到发生故障的对应支路。

同理也可仿真出接地网中各接地支路发生腐蚀（在非断裂状态）时的各种故障状态，然后构造故障字典表。这里就不再重述。

**双支路或多支路故障字典法仿真**

现在假设图 8-3 所示接地网，发生以下几种类型故障：

- （1）接地网中支路 1 和支路 4 同时发生断裂；
- （2）接地网中支路 2 和支路 6 同时发生断裂；
- （3）接地网中支路 8 和支路 27 同时发生断裂；
- （4）接地网中支路 10 和支路 22 同时发生断裂；
- （5）接地网中支路 25 和支路 26 同时发生断裂；
- （6）接地网中支路 30 和支路 40 同时发生断裂；
- （7）接地网中支路 6 和支路 24 的导体被腐蚀 40%，同时支路 15 断裂；
- （8）接地网中支路 6 和支路 24 的导体被腐蚀 50%，同时支路 25 断裂；
- （9）接地网中支路 6 和支路 24 的导体被腐蚀 60%，同时支路 35 断裂；
- （10）接地网中支路 6 和支路 24 的导体被腐蚀 90%，同时支路 45 断裂；
- （11）接地网中支路 10 断裂，同时支路 15、28 导体分别被腐蚀 50%；
- （12）接地网中支路 10 断裂，同时支路 25、38 导体分别被腐蚀 50%；
- （13）接地网中支路 10 断裂，同时支路 35、48 导体分别被腐蚀 50%；
- （14）接地网中支路 10 断裂，同时支路 45、50 导体分别被腐蚀 50%；
- （15）接地网中支路 8 和 40 断裂，同时支路 17 导体被腐蚀 40%；
- （16）接地网中支路 8 和 40 断裂，同时支路 27 导体被腐蚀 50%；
- （17）接地网中支路 8 和 40 断裂，同时支路 47 导体被腐蚀 60%；

(18) 接地网中支路 12 导体被腐蚀 50%，同时支路 17、18 断裂；

(19) 接地网中支路 12 导体被腐蚀 50%，同时支路 24、37 断裂；

(20) 接地网中支路 12 导体被腐蚀 50%，同时支路 48、52 断裂。

若选择接地网中的接地极：3、8、9、16、21、29、30、34 作为可测试点，应用公式 (8-9) 分别对以上各种故障进行模拟仿真，建立多支路故障诊断字典，结果见表 8-4。

表 8-4 双支路或多支路故障时的仿真结果

测点电压 故障情况	$U_3$	$U_8$	$U_9$	$U_{16}$	$U_{21}$	$U_{29}$	$U_{30}$	$U_{34}$
无故障	2.4378	-3.9597	2.6120	-9.7796	6.6309	-44.1910	-90.6000	-63.1432
第 1 种故障	1.999	-4.5670	2.0904	-10.2122	6.5457	-44.6175	-91.1515	-63.9600
第 2 种故障	13.4922	-1.4677	7.9498	-6.8143	9.8899	-41.5191	-87.5006	-59.5578
第 3 种故障	2.2995	-1.2887	6.4698	-14.1298	6.7839	-59.1796	-100.6449	-95.1264
第 4 种故障	3.9771	-1.0133	2.0795	-14.3376	10.7560	-45.7431	-92.5445	-65.0365
第 5 种故障	2.8149	-4.2445	2.4659	-6.9678	7.9141	-35.9612	-107.0959	-64.9568
第 6 种故障	3.3707	4.8411	1.1942	-7.5318	5.5281	-25.6821	-138.6980	-10.7456
第 7 种故障	3.0941	-2.3154	-2.1355	-10.3128	9.5636	-41.2176	-85.0731	-61.9783
第 8 种故障	2.1409	-4.9467	2.2266	-7.1587	6.0615	-34.6338	-105.9701	-61.0724
第 9 种故障	3.7021	-0.3223	3.5811	-8.7283	9.4105	-42.1914	-90.6223	-65.7747
第 10 种故障	2.7781	-1.7277	2.9290	-8.3090	6.7929	-39.8586	-88.3777	-62.0598
第 11 种故障	2.8125	-1.4326	6.1308	-10.0796	6.4262	-42.0053	-91.1851	-58.3855
第 12 种故障	3.2292	0.0752	4.3569	-10.7860	7.7985	-44.4579	-84.2977	-60.6946
第 13 种故障	3.2940	-0.0065	4.3313	-11.5106	8.1323	-40.9165	-88.8856	-58.7719
第 14 种故障	3.1887	-0.2773	4.0983	-9.6432	7.6598	-41.0864	-88.8864	-54.7788
第 15 种故障	0.6422	-7.8965	3.6974	-14.3578	2.4511	-54.7289	-96.9851	-76.9958
第 16 种故障	0.4824	-8.0549	4.0630	-14.3161	2.0499	-54.3609	-96.0653	-76.7727
第 17 种故障	1.0100	-7.1561	4.6268	-13.2801	3.0378	-54.2792	-95.7162	-77.3080
第 18 种故障	2.8745	-3.0307	3.2198	-9.1753	7.2399	-43.9210	-90.2780	-64.3800
第 19 种故障	2.4060	-6.1773	2.5889	-9.6910	6.6505	-45.1398	-91.1368	-64.5327
第 20 种故障	2.3402	-4.3185	3.2673	-7.7714	5.9103	-42.2389	-92.3433	-60.2254

从表 8-3 的仿真结果可以看出，当接地网发生双支路故障或腐蚀严重时，接地网各可及点的电压值测量值不等于无故障时的电压计算值。该诊断结果与事先假定的结果吻合。

## 8.5 接地网故障分块诊断法

### 8.5.1 分块法故障诊断理论

接地网故障的分块诊断就是对故障区域进行定位，即应用节点撕裂法将接地网  $N$  分解成  $N_1$  和  $N_2$  两个或者多个子网络，然后根据电路理论和故障判据将接地网故障定位在若干个子网络中，最后再将有故障的子网络进一步定位到更小的区域内。

应用节点撕裂法，在  $m_2$  个节点处将接地网撕裂分解成  $N_1$  和  $N_2$  两部分，如图 8-4 所示。

现在将接地网子网络  $N_1$  分开单独考虑，如图 8-5 所示。

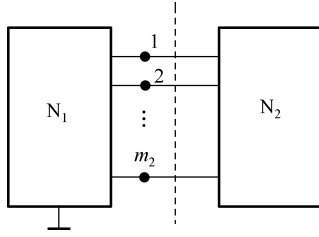
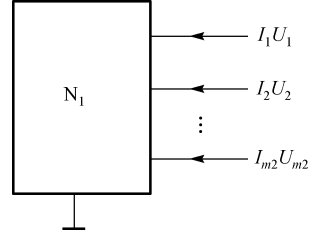


图 8-4 撕裂电路图

图 8-5 接地网子网络  $N_1$ 

在接地网子网络  $N_1$  中的全部节点由以下四种节点构成：

- ① 可测试点的电极被撕裂，用  $mt$  表示，节点集合为  $MT$ ；
- ② 不可测试点的电极被撕裂，用  $tt$  表示，节点集合为  $TT$ ；
- ③ 可测试点的电极未被撕裂，用  $gm$  表示，节点集合为  $GM$ ；
- ④ 不可测试点的电极未被撕裂，即内部节点，用  $ii$  表示，节点集合为  $II$ 。

若  $m$  表示  $N_1$  中可测试点的电极数，即  $m=mt+gm$ ； $m_2$  表示子网络  $N_1$  被撕裂的节点数，即  $m_2=mt+tt$ 。

由节点电压法得到子网络  $N_1$  的节点电压方程式为：

$$\begin{pmatrix} Y_{TT} & Y_{TM} & Y_{TG} & Y_{TI} \\ Y_{MT} & Y_{MM} & Y_{MG} & Y_{MI} \\ Y_{GT} & Y_{GM} & Y_{GG} & Y_{GI} \\ Y_{IT} & Y_{IM} & Y_{IG} & Y_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{TT} \\ U_{MT} \\ U_{GM} \\ U_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{TT} \\ 0 \\ I_{GM} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ I_{SM} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8-13)$$

式中，

$Y_{\times\times}$  为相应节点导纳矩阵；

$U_{\times\times}$  为相应节点电压向量；

$I_{SM}$  为被撕裂可测试节点的电流源激励，它是已知向量；

$I_{TT}$ 、 $I_{GM}$  为被撕裂的网络端口相应节点的电流值；

$U_{TT}$ 、 $U_{II}$  为未知量。

对式 (8-13) 中的元素进行调整后可得下式：

$$\begin{pmatrix} Y_{TM} & Y_{TG} & Y_{TT} & Y_{TI} \\ Y_{MM} & Y_{MG} & Y_{MT} & Y_{MI} \\ Y_{GM} & Y_{GG} & Y_{GT} & Y_{GI} \\ Y_{IM} & Y_{IG} & Y_{IT} & Y_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{MT} \\ U_{GM} \\ U_{TT} \\ U_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{GM} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_{TT} \\ I_{SM} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8-14)$$

令：

$$\begin{aligned} Y_I &= \begin{pmatrix} Y_{TM} & Y_{TG} \\ Y_{MM} & Y_{MG} \end{pmatrix} & Y_{II} &= \begin{pmatrix} Y_{TT} & Y_{TI} \\ Y_{MT} & Y_{MI} \end{pmatrix} \\ Y_{III} &= \begin{pmatrix} Y_{GM} & Y_{GG} \\ Y_{IM} & Y_{IG} \end{pmatrix} & Y_{IV} &= \begin{pmatrix} Y_{GT} & Y_{GI} \\ Y_{IT} & Y_{II} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

故：

$$Y_I \begin{pmatrix} U_{MT} \\ U_{GM} \end{pmatrix} + Y_{II} \begin{pmatrix} U_{TT} \\ U_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{TT} \\ I_{SM} \end{pmatrix} \quad (8-15)$$

$$Y_{III} \begin{pmatrix} U_{MT} \\ U_{GM} \end{pmatrix} + Y_{IV} \begin{pmatrix} U_{TT} \\ U_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{GM} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8-16)$$

由公式 (8-16) 可求出:

$$\begin{pmatrix} U_{TT} \\ U_{II} \end{pmatrix} = Y_{IV}^{-1} \begin{pmatrix} I_{GM} \\ 0 \end{pmatrix} - Y_{IV}^{-1} Y_{III} \begin{pmatrix} U_{MT} \\ U_{GM} \end{pmatrix} \quad (8-17)$$

将公式 (8-17) 代入公式 (8-15), 可求得撕裂端点的电流矩阵方程式为:

$$\begin{pmatrix} I_{TT} \\ I_{SM} \end{pmatrix} = Y_I \begin{pmatrix} U_{MT} \\ U_{GM} \end{pmatrix} + Y_{II} \left( Y_{IV}^{-1} \begin{pmatrix} I_{GM} \\ 0 \end{pmatrix} - Y_{IV}^{-1} Y_{III} \begin{pmatrix} U_{MT} \\ U_{GM} \end{pmatrix} \right) \quad (8-18)$$

由上式可计算出撕裂端点的电流值  $[I_{ts}]$ 。

判断接地网络  $N_1$  有无故障的依据是: 在接地网  $N_1$  的撕裂端口应用 KCL, 即对  $[I_{ts}]$  的各元素求和来判断。即:

$$D = \sum_{j=1}^{m_2} I_{ts_j} \quad (8-19)$$

如果接地网  $N_1$  无故障, 则  $D$  值必为零; 反之,  $N_1$  发生故障, 则  $D$  值不为零。通过公式 (8-19) 可以判断出接地网的局部区域是否发生故障。

### 接地网故障诊断可信性的拓扑条件

应用撕裂法接在  $m_2$  个节点处将接地网  $N$  撕裂为两个子网络  $N_1$  和  $N_2$ , 单独考虑子网络  $N_1$ , 当满足下列条件时, 则  $N_1$  子网络的故障是可诊断的:

- ① 子网络  $N_1$  中的可测试点, 存在  $tt$  条从  $TT$  通向  $GM$  的端点相异的独立通路;
- ② 在子网络  $N_1$  中, 每一个不含参考点的  $n$  端子网络都应满足:  $tn < n + mi$ ;
- ③ 接地网的参考节点与  $(TT + II)$  有关联。

如图 8-6(a) 所示, 在网络  $N$  的节点 8、9、10 处将网络  $N$  撕裂成  $N_1$  和  $N_2$  两部分。现单独考虑子网络  $N_1$  见图 8-6(b)。当选择 1、2、3 为可测试点时, 子网络  $N_1$  是可解的, 但是  $N_1$  的故障是不可诊断的。这是由于 5、6、3、8、6、10 或 8、11、10 等组成的三端子网络, 以及由 11、7 或 11、10 所组成的二端子网络都不满足  $tn < n + mi$  的条件。因此, 当这些子网络内部支路发生故障时, 不能被式 (8-19) 所校验。然而, 若选择 1、3、4 或 1、2、4 为可测试点时, 则  $N_1$  满足故障诊断可信性的拓扑条件②, 因而  $N_1$  子网络级故障是可诊断的。

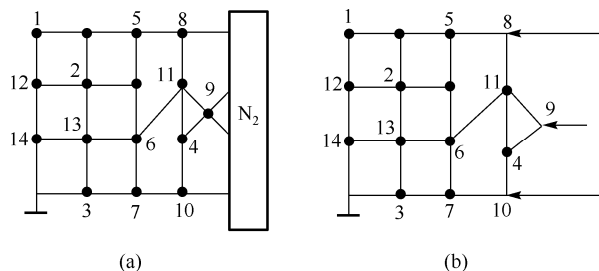


图 8-6 网络  $N$

若选择 12、13、14 作为可测试点，则  $N_1$  不可解。因为这时不满足故障诊断可信性①的条件：在  $GT1$  图中  $TT$  和  $GM$  之间不存在 3 条端点相异的独立通路。

### 8.5.2 接地网分块故障定位仿真

如图 8-7 所示电力系统接地网有 20 个节点（19 个独立节点），31 条支路，均压导体非均匀分布，水平导体的间隔距离分别为 12.5m、10m、12.5m，垂直导体的间隔距离分别为 8m、12m、12m、8m，单位长度导体的电阻为  $0.45\Omega/\text{m}$ ，并在第 10 节点和第 17 节点加上一个 10A 的电流源激励。选择接地极  $U_3$ 、 $U_5$ 、 $U_{10}$ 、 $U_{15}$  和  $U_{18}$  为可测试点电压。

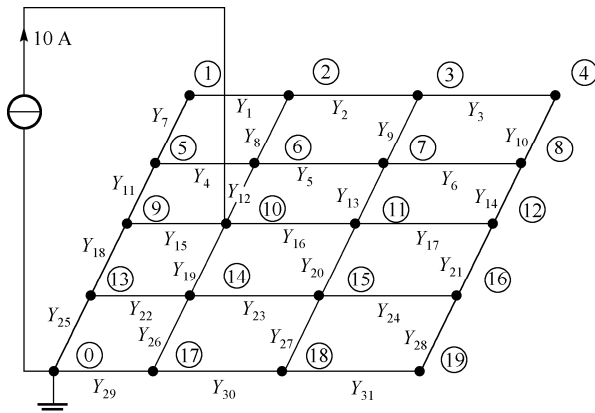


图 8-7 接地网等效电路图

通过计算可以得到接地网水平导体电阻分别为： $0.056\Omega/\text{m}$ 、 $0.045\Omega/\text{m}$ 、 $0.056\Omega/\text{m}$ ；垂直导体电阻分别为： $0.036\Omega/\text{m}$ 、 $0.054\Omega/\text{m}$ 、 $0.054\Omega/\text{m}$ 、 $0.036\Omega/\text{m}$ 。采用节点撕裂法在节点 3、7、11、15、18 处将接地网分裂为  $N_1$  和  $N_2$  两部分。单独考虑  $N_1$ ，如图 8-8 所示。

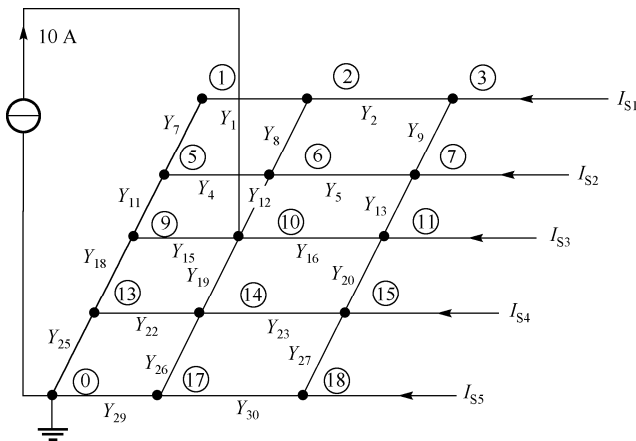


图 8-8 子网络  $N_1$  连接图

现假设在接地网中发生以下 10 种类型的故障：

- (1) 接地网中支路 1 和支路 3 同时发生断裂；
- (2) 接地网中支路 1 和支路 5 同时发生断裂；
- (3) 接地网中支路 7 和支路 25 同时发生断裂；

- (4) 接地网中支路 12 和支路 20 同时发生断裂;
- (5) 接地网中支路 10 和支路 21 同时发生断裂;
- (6) 接地网中支路 15 和支路 18 同时发生断裂;
- (7) 接地网中支路 7 和支路 25 的导体被腐蚀 30%, 同时支路 31 断裂;
- (8) 接地网中支路 7 和支路 25 的导体被腐蚀 50%, 同时支路 31 断裂;
- (9) 接地网中支路 7 和支路 25 的导体被腐蚀 70%, 同时支路 31 断裂;
- (10) 接地网中支路 12 断裂, 同时支路 5、8、13、16 分别被腐蚀 30%、40%、50%、60%。

### 第 1 种故障诊断步骤:

首先测试出接地网故障时可测试点电压的测量值, 如表 8-5 所示。

表 8-5 接地网可测点电压测量值

单位 (V)

测试点	$U_3$	$U_5$	$U_{10}$	$U_{15}$	$U_{18}$
电压测量值	-73.4077	35.4819	-11.8758	-48.3253	-3.1867

然后应用公式 (8-14) 建立接地子网络  $N_1$  的节点电压方程式, 对方程式 (8-14) 进行矩阵变换, 形成公式 (8-17)、公式 (8-18), 然后将可测试点的电压测量值  $U_3$ 、 $U_5$ 、 $U_{10}$ 、 $U_{15}$  和  $U_{18}$  分别代入式 (8-18) 中, 即可计算出撕裂端口的电流值。最后将计算结果它代入公式 (8-19), 然后应用 KCL 求出撕裂端口电流的代数值, 即  $D=0.28689$ 。

最后根据故障诊断判据, 由于  $D$  值不为零, 则可判断出接地网  $N_1$  内部发生故障。这和我们事先的假设的第一种故障是相吻合的。

按照上述故障诊断方法和步骤分别可以测出第 2 至第 10 种故障时可测试点  $U_3$ 、 $U_5$ 、 $U_{10}$ 、 $U_{15}$  和  $U_{18}$  的电压测量值, 如表 8-6 所示。

表 8-6 接地网可测试点电压测量值

单位 (V)

测试点电压	$U_3$	$U_5$	$U_{10}$	$U_{15}$	$U_{18}$
第 2 种故障	-73.3469	38.3980	-8.0818	-44.9873	0.2077
第 3 种故障	-58.1180	32.0000	0.0001	-0.0001	64.0000
第 4 种故障	-71.8575	35.5608	-4.9213	-13.5851	21.5594
第 5 种故障	-112.7266	57.0313	-12.1337	-17.1162	40.1680
第 6 种故障	-78.6479	38.5254	-41.8384	-62.9687	-13.3556
第 7 种故障	-81.8611	39.1681	-16.6882	-59.3845	16.8173
第 8 种故障	-83.1343	39.8670	-17.8509	-63.1228	9.2387
第 9 种故障	-84.6520	40.7001	-19.2368	-67.5787	0.2053
第 10 种故障	-60.4524	27.5781	-22.0087	-34.5677	7.2197

然后再用式 (8-14) ~ 式 (8-19) 分别算出当接地网发生第 2 至第 10 种类型的故障时, 在子网络  $N_1$  撕裂端口的电流代数和  $D$  的值, 如表 8-7。

从表 8-7 可见, 当接地网络  $N_1$  内部发生故障时,  $N_1$  撕裂端口电流的  $D$  值一定不为零; 如果故障不是在接地网  $N_1$  子网络中发生, 其  $N_1$  撕裂端口的  $D$  值为零。如接地网发生第五种故障 (支路 10 和支路 21 同时发生断裂) 时, 由于发生故障的支路不在  $N_1$  中, 所以  $N_1$  撕裂端口电流求和等于零, 则子网络  $N_1$  无故障。所以通过公式 (8-19) 的计算结果就可以判断出接地网局部区域内是否有故障。以上模拟仿真诊断结果与原先的假设完全是相吻合的。

表 8-7 N<sub>1</sub> 撕裂端口电流求和的 *D* 值

故障类型	撕裂端口电流 <i>D</i> 值	故障判别
第 2 种故障	0.49175	<i>D</i> 值不为零, N <sub>1</sub> 有故障
第 3 种故障	0.59198	<i>D</i> 值不为零, N <sub>1</sub> 有故障
第 4 种故障	0.49562	<i>D</i> 值不为零, N <sub>1</sub> 有故障
第 5 种故障	$-3.27881 \times 10^{-14}$	<i>D</i> 值为零, N <sub>1</sub> 无故障
第 6 种故障	0.50338	<i>D</i> 值不为零, N <sub>1</sub> 有故障
第 7 种故障	0.15668	<i>D</i> 值不为零, N <sub>1</sub> 有故障
第 8 种故障	0.19735	<i>D</i> 值不为零, N <sub>1</sub> 有故障
第 9 种故障	0.27133	<i>D</i> 值不为零, N <sub>1</sub> 有故障
第 10 种故障	1.59197	<i>D</i> 值不为零, N <sub>1</sub> 有故障



# 电力网络分析的计算机实现

## 9.1 MATLAB 软件在电力网络中的应用

随着电力工业的发展,电力系统的规模将越来越大,电压的等级也越来越高,特别对于电力系统中的节点数目可能成千上万,在这样的条件下用手工计算电力系统中的潮流已经成为不可能。然而随着网络计算的迅速发展,现在有许多软件可应用于电力系统的仿真计算,而且误差可以控制到最低,目前应用最广泛的是由矩阵实验室推出的 MATLAB 软件。

MATLAB 和 Mathematica、Maple 并称为三大数学软件。它在数学类科技应用软件中在数值计算方面首屈一指。MATLAB 可以进行矩阵运算、绘制函数和数据、实现算法、创建用户界面、连接其他编程语言的程序等,主要应用于工程计算、控制设计、信号处理与通信、图像处理、信号检测、金融建模设计与分析等领域。MATLAB 的基本数据单位是矩阵,它的指令表达式与数学、工程中常用的形式十分相似,故用 MATLAB 来解算问题要比用 C、Fortran 等语言完成相同的事情简洁得多,并且 MathWorks 也吸收了像 Maple 等软件的优点,使 MATLAB 成为一个强大的数学软件。在新的版本中也加入了对 C、Fortran、C++、Java 的支持。可以直接调用,用户也可以将自己编写的实用程序导入到 MATLAB 函数库中方便自己以后调用,此外许多的 MATLAB 爱好者都编写了一些经典的程序,用户直接进行下载就可以用。

目前 MATLAB 软件在电力系统中主要用于潮流仿真计算、电力系统故障定位仿真计算、配电网以及变压器绝缘老化仿真检测等。所以要学好电力系统首先就要先学会熟练应用 MATLAB 软件,它提供的电力系统工具箱功能非常强大,可以用于电路、电力电子系统、电机系统、电力传输等过程的仿真,它提供了一种类似电路建模的方式进行模型绘制,在仿真前将自动将其变化成状态方程描述的系统形式,然后在进行仿真分析, MATLAB 建模还可以直接调用工具箱中的电气模块。它含有丰富的元件模型,几乎提供了组成电力系统的所有元件。

### 9.1.1 MATLAB 语言结构

MATLAB 命令窗口就是 MATLAB 语言的工作空间, MATLAB 的各种功能的执行必须在此窗口才能实现。在这种环境下输入的 MATLAB 语句称作窗口命令。所谓窗口命令就是在上述环境下输入的 MATLAB 语句,直接执行它们完成相应的运算及绘图等。

#### 1. 顺序结构

顺序结构就是依照顺序执行程序的各项语句,一般不包含其他子结构或控制语句,是最简单但却最常用的结构。MATLAB 语句的一般格式为:

变量名=表达式

其中，等号右边的表达式可由操作符或其他字符、函数和变量组成，它可由是 MATLAB 允许的数学或矩阵运算，也可以包含 MATLAB 下的函数调用；等号左边的变量名为 MATLAB 语句右边表达式的返回值语句所赋值的变量名。在调用函数时，MATLAB 允许一次返回多个结果，这时等号左边的变量名需要用 [ ]括起来，且各变量之间用逗号分隔开。如果左边的变量名默认时，则返回值自动赋给 ans。

在 MATLAB 中的变量名必须以字母开头，之后可以是任意字母、数字或者下划线，但变量中不能含有标点符号。变量名区分字母的大小写，同一名字的大写与小写被视为两个不同的变量。一般说来，在 MATLAB 下变量名可以为任意字符串，但 MATLAB 保留了一些特殊的字符串常量。

MATLAB 语句既可由分号结束，也可以由逗号或者换行结束，但它的含义是不同的。用分号结束，则说明执行了这一条命令，MATLAB 这时将不立即显示运算的中间结果，而是等待下一条命令的输入，如果以逗号或者回车结束，则把左边变量的值显示在屏幕上。当然任何时候也可以输入相应的变量名来查看其内容。

## 2. 循环结构

### (1) for 循环语句

for 循环允许一组命令（语句）以固定的和预定的次数重复执行。

格式：

```
for S=SB : ST : SE
    [ 语句组 ]
```

```
end
```

说明：格式中 S=SB: ST: SE 称为循环表达式，其中 S 为循环变量名，SB 为循环变量初值，SE 为循环变量终值，ST 为循环变量步长，默认值为 1。for 与 end 之间的[语句组]称为循环体，循环不会因在循环体内对循环变量重新设置而中断。并且，for 循环语句可以嵌套使用，但不允许交叉。嵌套使用时，外层循环变量每取一个值，内层循环变量就完成全部循环过程。

### (2) while 循环语句

while 循环语句用于循环次数未知的情况。

格式：

```
while <条件表达式>
    [ 语句组 ]
```

```
end
```

说明：在 while 和 end 之间的语句组称为循环体。运行时，首先检测条件表达式的值，如果其值为逻辑真（非 0 值），则执行循环体中的语句组；否则，跳出循环。

执行完语句组后，继续检测条件表达式的值，若表达式值为逻辑真，则继续执行循环体语句组；一旦表达式值为逻辑假（0 值），则终止循环。

## 3. 选择结构

### (1) if-else-end 分支结构

格式一：

```
if <条件表达式 1>
```

```
[ 语句组 1 ]
```

```
end
```

说明：当条件表达式 1 成立时，执行语句组 1，然后执行 end 后的语句；否则，跳出 if 语句，直接执行 end 后的语句。

格式二：

```
if <条件表达式 1>
```

```
[ 语句组 1 ]
```

```
else
```

```
[ 语句组 2 ]
```

```
end
```

说明：当条件表达式 1 成立时，执行语句组 1，然后执行 end 后的语句；否则，执行语句组 2，然后执行 end 后的语句。

格式三：

```
if <条件表达式 1>
```

```
[ 语句组 1 ]
```

```
elseif <条件表达式 2>
```

```
[ 语句组 2 ]
```

```
...
```

```
elseif <条件表达式  $n$ >
```

```
[ 语句组  $n$  ]
```

```
else
```

```
[ 语句组  $n+1$  ]
```

```
end
```

说明：如果条件表达式  $a$  ( $a=1,2,\dots,n$ ) 成立，执行语句组  $a$  ( $a=1,2,\dots,n$ )，然后执行 end 后的语句；否则，若条件表达式  $a+1$  ( $a=1,2,\dots,n-1$ ) 成立，执行语句组  $a+1$  ( $a=1,2,\dots,n-1$ )，然后执行 end 后的语句；最终，如果条件表达式  $n$  不成立，则执行语句组  $n+1$ ，然后执行 end 后的语句。

(2) switch-case 结构

格式：

```
switch <开关表达式>
```

```
case <情况表达式 1>
```

```
[语句组 1]
```

```
case <情况表达式 2>
```

```
[语句组 2]
```

```
...
```

```
case <情况表达式  $n$ >
```

```
[语句组  $n$ ]
```

```
otherwise
```

```
[语句组  $n+1$ ]
```

```
end
```

说明：该语句结构用于实现多种情况（case）下的开关控制，以执行分支结构。执行过程为：先计算开关表达式的值，当情况表达式的值等于开关表达式的值时，执行相应情况后面的语句组，然后跳出循环体；如果没有相等的情形，则执行 **otherwise** 后的语句组，然后跳出循环体。

#### 4. 其他控制语句

##### (1) break 语句

**break** 语句终止当前正在执行的循环语句，根据内部设定的某种条件，决定是否退出循环。当 **break** 用于嵌套循环语句时，只中断最内层包含该语句的循环执行，而不影响外层循环执行。

##### (2) continue 语句

**continue** 语句通常用在循环结构中，其作用是结束本次循环，即跳过循环体中下面尚未执行的语句，接着进行下一次是否执行循环的判断。

### 9.1.2 空间管理命令

##### (1) who 命令

为了查看工作空间中都存在哪些变量名，则可以 **who** 命令来完成。例如，当 MATLAB 的工作空有 *a*, *b*, *c*, *d* 四个变量时，使用 **who** 命令操作如下。

```
>>who
```

```
a b c d
```

##### (2) whos 命令

使用 **whos** 命令只能看到在命令空间的变量列表，也可以使用 **whos** 命令进一步得到变量的具体信息。

##### (3) clear 命令

了解了当前工作空间中的所有变量名之后，可以使用 **clear** 命令来删除其中一些不再使用的变量名，这样可使得整个工作空间更简洁，同时节省一部分的内存。

##### (4) save 命令

当推出 MATLAB 时在 MATLAB 工作空间中的变量会丢失。如果在 MATLAB 退出前想把工作空间中的变量保持到文件中，则可以调用 **save** 命令来完成，该命令的格式为：

```
save 文件名 变量列表表达式 其他选项
```

##### (5) load 命令

MATLAB 提供的 **load** 命令可以从文件中把变量调出并重新装到 MATLAB 的工作空间去，是与 **save** 命令相反的过程，该命令的调用格式与 **save** 命令相同。

当然工作空间中变量的保存和调出可利用命令窗口菜单选项中的 **file—save workplace as** 和 **file—open** 命令来分别完成。

##### (6) clc 命令

在编制某个程序时，为了保持显示界面的整洁，程序开始第一步应先进行清屏。

##### (7) exist 命令

要查看当前工作空间是否存在一个变量时，可以使用 **exist** 命令完成，其调用格式为：

```
i=exist(a)
```

##### (8) format 命令

format 命令用来设置输出数据格式。其调用格式为：

format 命令参数

#### (9) sym 命令

sym 命令可以设置数据显示格式，并进行格式转换，以达到动态改变数据格式。其调用的格式为：

sym (变量名, 参数)

#### (10) vap 命令

vap 命令用来设置数据精度并计算，其调用格式为：

R=vap(a,b)

#### (11) help 命令

当知道所要求助的命令名时，可以直接在 MATLAB 命令窗口输入 help 命令。

#### (12) lookfor 命令

lookfor 可以查找所要的 MATLAB 提供的标题或者 M 文件的帮助部分，返回结果为包含所指定的关键词项。

### 9.1.3 MATLAB 的 M 文件

由于 MATLAB 本身可以被认为是一种高效的语言，所以用它可以编写出具有特殊意义的文件来，这些文件是由一系列的 MATLAB 语句组成的，它既可以是一系列命令窗口语句，又可以是由各种控制语句和说明语句构成的函数文件。由于它们都是由 ASCII 码组成的，其扩展名均为 m，故统称作 M 文件。MATLAB 的 M 文件有两种形式：文本文件和函数文件。M 文件可以通过 M 文件编辑器建立完成，即通过 MATLAB 命令窗口的 file 菜单下的 New 命令建立 M-file，M 文件编辑器窗口。

文本文件由一系列的 MATLAB 的语句组成，它类似于 DOS 下的批处理文件，通过文本编辑对其进行查看或者修改。在 MATLAB 的提示符下直接输入文本文件名，便可自动执行文件中的一系列命令，直到得出最终的结果。文本文件在工作空间中的变量为全局变量。函数文件的功能是建立一个函数，且这个文件与 MATLAB 的库函数一样使用，它与文本文件不同，在一般情况下不能直接输入函数文件的文件名来打开一个函数文件，它必须由其他语句来调用。函数文件允许有多个输入参数和多个输出参数值，其基本的格式如下：

function[f1,f2,f3,...]=fun(x,y,z,...)

其中，x,y,z...是形式输入参数；f1,f2,f3,...是返回时的形式输出参数；fun 是函数名。

### 9.1.4 MATLAB 的矩阵运算

#### 1. 矩阵的生成

在 MATLAB 语言中不必描述矩阵的维数和类型，矩阵的维数和类型是由输入的格式和内容来确定的。矩阵可以以下列方式来赋值：

- ① 直接列出元素的形式；
- ② 通过语句和函数产生；
- ③ 建立在文件中；
- ④ 从外部的数据文件中装入。

对于比较小且简单的矩阵可以直接使用排列的形式输入，把矩阵的元素直接排列到方括号中，每行内的元素间用空格或逗号分开，行与行间的内容用分号隔开。

例如：矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

在 MATLAB 下输入的方式为：

```
>>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
```

或者

```
>>A=[1 2 3;4 5 6;7 8 9]
```

都可以得到相同的结果，即

```
A=
    1    2    3
    4    5    6
    7    8    9
```

在 MATLAB 中矩阵的元素可用任何表达式来描述，它既可以是实数也可以是复数。

例如：

```
>>B=[-1/3 1.3 sqrt(3) (1+2+3)*i]
```

结果显示：

```
B=
-0.3333    1.3000    1.7210    0+6.0000i
```

MATLAB 允许把矩阵作为元素来建立新的矩阵。对于  $A$  矩阵，可通过下面的语句来显示。

```
>>C=[A;[10,11,12]]
```

结果显示：

```
C=
    4    5    6
    7    8    9
   10   11   12
```

MATLAB 还允许对一个矩阵的单个元素进行赋值和操作。例如，如果想把  $A$  矩阵的第 2 行第 3 列的元素赋为 100，则可以通过下面的语句来完成。

```
>>A(2,3)=100
```

结果显示：

```
A=
    2    3
    5   100
    8    9
```

这时将只改变此元素的值，而不影响其他元素的值。

如果给出的矩阵的行数或者列数大于原来矩阵的范围, 则 MATLAB 将自动扩展原来的矩阵, 并将扩展后未赋值的矩阵元素置零。例如, 把上面的矩阵的第 4 行第 5 列元素的值定义为 8, 就可以通过下面的语句来实现。

```
>>A(4,5)=8
```

结果显示:

```
A=
    1    2    3         0    0
    4    5   100         0    0
    7    8    9         0    0
    0    0    0         0    0
```

矩阵的元素可以利用下列语句来产生:

```
S1: S2: S3
```

其中 S1 为起始值, S3 为终止值, S2 为步距。使用这样的命令就可以产生一个由 S1 开始, 以 S2 自增, 并终止于 S3 的行相量。

例如:

```
>>y=0:pi/4:pi
```

结果显示:

```
y=
    0    0.7854    1.5708    2.3562    3.1416
```

## 2. 矩阵的基本操作

在 MATLAB 中矩阵还可以进行转置运算、加法运算、乘法运算、除法运算、乘方运算、翻转运算、关系运算、逻辑运算、向量运算等。

其中  $A(m,n)$  表示取  $A$  矩阵第  $m$  行、第  $n$  列的元素;  $A(m,:)$  表示取  $A$  矩阵第  $m$  行的全部元素;  $A(:,n)$  表示取  $A$  矩阵第  $n$  列的全部元素;  $A(m_1:m_2,:)$  表示取  $A$  矩阵第  $m_1 \sim m_2$  行的全部元素;  $A(:,n_1:n_2)$  表示取  $A$  矩阵第  $n_1 \sim n_2$  列的全部元素;  $A(m_1:m_2,n_1:n_2)$  表示取  $A$  矩阵第  $m_1 \sim m_2$  行内, 并在第  $n_1 \sim n_2$  列的所有元素。

对于潮流计算我们可以用计算机进行求解, 具体的求解过程可以看下面这个例子。

如图 9-1 所示的电力网络, 网络中各支路与节点之间的连接关系如图中所示。电力网中各支路的导纳值单位均为西门子, 假如电力网中发电机均为无穷大系统, 电力网中各支路与节点的连接关系及其导纳值如下所示:

1	3	0.1852	10	20	0.1499
2	4	0.1737	11	12	0.2559
2	5	0.1983	11	14	0.1987
2	6	0.1763	12	13	0.1997
3	4	0.0379	13	16	0.2185
4	6	0.0414	14	15	0.1932
4	11	0.2560	16	17	0.1292
5	7	0.1160	17	18	0.0680
6	7	0.0820	19	20	0.0236

6	8	0.0420	20	21	0.1790
6	9	0.2080	21	22	0.3292
6	10	0.5560	22	23	0.2087
6	24	0.0599	24	23	0.3960
8	24	0.2000	1	0	0.0300
9	10	0.1100	2	0	0.0500
10	15	0.0845	5	0	0.0550
10	18	0.2090	8	0	0.0650
10	19	0.0749			

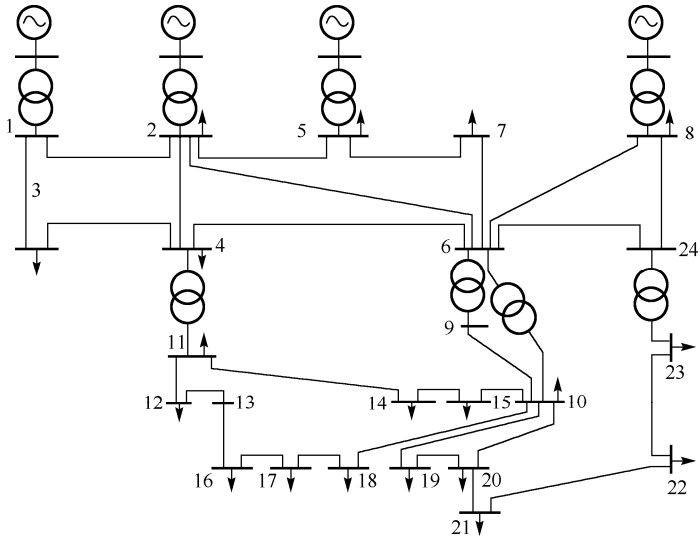


图 9-1 电力网络接线图

采用 MATLAB 编程计算：

- (1) 求电力网节点电压值和各支路的电压和电流值；
- (2) 求电力网支路导纳对节点电压的灵敏度；
- (3) 求电力网支路导纳对支路电压的灵敏度；
- (4) 求电力网支路阻抗变化的支路电流灵敏度。

计算过程按以下编程实现：

```
Clear all
Z=
[
1 3 0.1852 0 11; 14 15 0.1932 0 11;
2 4 0.1737 0 11; 16 17 0.1292 0 11;
2 5 0.1983 0 11; 17 18 0.0680 0 11;
2 6 0.1763 0 11; 19 20 0.0236 0 11;
3 4 0.0379 0 11; 20 21 0.1790 0 11;
4 6 0.0414 0 11; 21 22 0.3292 0 11;
4 11 0.2560 0 11; 22 23 0.2087 0 11;
5 7 0.1160 0 11; 24 23 0.3960 0 1.51;
6 7 0.0820 0 11; 1 0 0.0300 0.0300 11;
6 8 0.0420 0 11; 2 0 1.0500 0.0500 11;
```



```

6   9   0.2080   0   11;   5   0   1.0550   0.0550   11;
6   10  0.5560   0   11;   8   0   1.0650   0.0650   11;
6   24  0.0559   0   11;   1   2   0.0245   0         11;
8   24  0.2000   0   11;   3   0   1.0000   0         11;
9   10  0.1100   0   11;   4   0   2.0000   0         11;
10  15  0.0845   0   11;   7   0   2.0000   0         11;
10  18  0.2090   0   11;   10  0   0.1000   0         11;
10  19  0.0749   0   11;   11  0   0.2000   0         11;
10  20  0.1499   0   11;   12  0   0.1000   0         11;
11  12  0.2559   0   11;   14  0   1.0000   1.5       11;
11  14  0.1987   0   11;   21  0   0.2000   0         11;
12  13  0.1997   0   11;   22  0;   1.5000   0         11;
13  16  0.2185   0   11;   23  0   1.0000   0         11;

                                l;

[b,b1]=size(z);
for i=1:b
    while z(i,6)~=1&z(i,5)~=1
        if z(i,5)>=z(i,6)
            z(i,5)=z(i,5)/z(i,6);z(i,6)=1;
        else
            z(i,5)=1;    z(i,6)=z(i,6)/z(i,5);
        end
    end
end    %变比转化为合适形式
for i=1:b
    k1=z(i,1);
    k2=z(i,2);
    if k1==0
        A(k2,i)=-1/z(i,6);
    else if k2==0
        A(k1,i)=1/z(i,5);
    else
        A(k2,i)=-1/z(i,6);
        A(k1,i)=1/z(i,5);
    end
end
End

Yb=diag(z(:,3));
Yn=A*Yb*A';
Yn1=inv(Yn);
In=A*z(:,4);
Un=Yn1*In    %Un
Ub=A'*Un;
Ib=Yb*Ub-z(:,4)    %Ib

```

支路	支路电流	节点	节点电压	支路	支路电流	节点	节点电压
1→3	0.0233	1	0.1496	16→17	0.0019		
2→4	0.0026	2	0.0577	17→18	0.0019		
2→5	0.0017	3	0.0240	19→20	0.0014		
2→6	-0.0126	4	0.0429	20→21	0.0133		
3→4	-0.0007	5	0.0491	21→22	0.0076		
4→6	-0.0036	6	0.1290	22→23	-0.0008		
4→11	-0.0805	7	0.0074	24→23	0.0100		
5→7	0.0048	8	0.0618	1→0	-0.0255		
6→7	0.0100	9	0.1474	2→0	0.0106		
6→8	0.0028	10	0.1824	5→0	-0.0031		
6→9	-0.0038	11	0.3572	8→0	0.0008		
6→10	-0.0297	12	0.2516	1→2	0.0023		
6→24	0.0046	13	0.2422	3→0	0.0240		
8→24	0.0020	14	1.2578	4→0	0.0859		
9→10	-0.0038	15	0.9306	7→0	0.0148		
10→15	-0.0632	16	0.2336	10→0	0.0182		
10→18	-0.0019	17	0.2190	11→0	0.0714		
10→19	0.0014	18	0.1914	12→0	0.0252		
10→20	0.0119	19	0.1634	14→0	-0.2422		
11→12	0.0270	20	0.1030	21→0	0.0057		
11→14	-0.1789	21	0.0286	22→0	0.0084		
12→13	0.0019	22	0.0056	23→0	0.0092		
13→16	0.0019	23	0.0092				
14→15	0.0632	24	0.0517				

形成参数矩阵:

```

Or=[1,3,1,0,0;
    1,2,2,0,0;
    2,3,3,0,0;
    1,4,4,0,0;
    2,5,5,0,0;
    3,6,0,0,0;
    4,5,7,0,0;
    5,6,8,0,0;
    4,7,9,0,0;
    5,0,10,0,0;
    6,8,11,0,0;
    7,0,12,0,0;
    8,0,13,0,0;
    1,0,0,1,0];
con=[6,3,0,2];
%形成 A 矩阵, 导纳矩阵 Yb, 和 Is 矩阵
[b,b0]=size(or);
for i=1:b
    k1=or(i,1);
    k2=or(i,2);

```

```

    Yb(i,i)=or(i,3);
    Is(:,1)=or(:,4);
    Us(:,1)=or(:,5);
    if k1==0
        A(k2,i)=-1;
    else if k2==0
        A(k1,i)=1;
    else
        A(k1,i)=1;
        A(k2,i)=-1;
    end
    end
    [m,m0]=size(con);
    controlling=con(:,1);
    controled=con(:,2);
    gm=con(:,3);
    Yb(controlling,controled)=gm;
    end

```

采用无容差法计算电压灵敏度:

```

Yb=A*Yb*A';
Jn=A*Is-A*Yb*Us;
Un=inv(Yn)*Jn;
Ub=A'*Un;
U=(Ub+Us)';
S_1=inv(Yn)*A;
S_2=A'*S_1;
Sn_=-kron(U,S_1);
Sb_=-kron(U,S_2);
[m,n]=size(A);
k=1;
for i=1:n
    Sn(:,i)=Sn_(:,k);
    Sb(:,i)=Sb_(:,k);
    if i~=n
        for j=1:n
            k=k+1;
        end
    end
    end
    k=k+1;
end

```

**答案**

节点电压灵敏度:

```

ans=
columns 1 through 6:
-0.036005   -0.020365   0.0074997   -0.012024   0.0041824   0.035457

```

-0.015422	-0.027638	0.0017653	-0.016318	0.0056761	0.0039221
-0.020583	0.00072733	0.009265	0.0042942	-0.0014937	0.031535
-0.0066968	-0.012859	-0.00099225	-0.029598	-0.0038837	-0.010825
0.0061807	0.0099963	0.0004232	-0.0091037	-0.011013	-0.017352
0.0274	0.0031703	-0.0089513	-0.013962	-0.0093227	-0.059173
-0.0025448	-0.0047831	-0.00034987	0.0041764	-0.0014527	-0.002604
0.00063637	0.00044733	-0.00010956	-0.00056401	0.00019619	-0.010287
-0.00099707	-0.0019949	-0.00016888	0.0017139	-0.00059616	-0.0027854
0.00079992	0.0012921	5.4336e-005	-0.0011771	0.00040947	-0.0022698
8.8586e-005	0.00045757	8.8776e-005	-0.00033212	0.00011553	0.0043425
-0.0007478	-0.0014962	-0.00012666	0.0012854	-0.00044712	-0.002089
7.4957e-005	0.00038718	7.5118e-005	-0.00028102	9.77522e-005	0.0036744
-0.0084416	-0.01635	-0.0012878	-0.026599	-0.004927	-0.0157

columns 7 through 11:

-0.00096113	6.3211e-0005	-0.00051505	0.00033835	3.1994e-005
-0.0013044	8.5787e-005	-0.000699	0.00045918	4.3421e-005
0.00034326	-2.2576e-005	0.00018395	-0.00012084	-1.1427e-005
0.00089248	-5.8696e-005	0.00047826	-0.00031418	-2.9709e-005
-0.00072771	4.786e-005	-0.00038997	0.00025618	2.4224e-005
-0.0007306	-0.0015336	-0.00098701	-0.00076321	0.00045219
-0.0029246	0.00019234	-0.0015672	0.0010295	9.7355e-005
0.00034037	-0.001604	-0.00041309	-0.0011402	0.00041654
-0.001209	-0.00017569	-0.0036024	-0.00094039	8.8924e-005
0.0008089	-0.0004998	-0.00096156	-0.0026752	-0.00025297
0.00025379	0.00059811	-0.00029709	-0.00083145	-0.00092567
-0.00090672	-0.00013177	0.0010736	-0.00070529	-6.6693e-005
0.00021474	0.00050609	-0.00025138	-0.00070354	0.000025616
-0.0012232	-0.00036615	-0.0020505	-0.0019599	-0.00018533

Columns 12 through 14

-0.00028972	2.2907e-005	-0.022692
-0.00039318	3.1088e-005	-0.030796
0.00010347	-8.1812e-006	0.0081041
0.00026902	-2.1271e-005	-0.039513
-0.00021936	1.7344e-005	-0.017181
-0.00055519	0.00032376	-0.02999
-0.00088156	6.9704e-005	-0.008463
-0.00023237	0.00029823	-0.0047051
0.00080522	-6.3668e-005	-0.010979
-0.00054088	-0.00018112	-0.01075
-0.00016711	0.00021675	-0.0032745
-0.0022277	-4.7751e-005	-0.0082343
-0.0001414	-0.0006961	-0.0027708
-0.0011534	-0.00013269	-0.058727

支路电压灵敏度:

```
ans=
Columns 1 through 5
-0.0084416    -0.01635    -0.0012878    -0.026599    -0.004927
0.0069806     0.011288     0.0047754    -0.010281    -0.010603
0.027563      0.0040151    -0.0087875    -0.014575    -0.009109
-0.0017449    -0.0034911    -0.00029554    0.0029993    -0.0010433
0.00079992     0.0012921    5.4336e-005    -0.0011771    0.00040947
0.00016354     0.00084475    0.00016389    -0.00061314    0.00021328
-0.0007478     -0.0014962    -0.00012666    0.0012854    -0.00044712
7.4957e-005     0.00038718    7.5118e-005    -0.00028102    9.7752e-005

Columns 6 through 10:
-0.0157    -0.0012232    -0.00036615    -0.0020505    -0.0019599
-0.019622    8.1188e-005    -0.00045194    -0.0013515    -0.002419
-0.051156    -0.00026207    -0.00042936    -0.0015355    -0.0022982
-0.0048744    -0.0021157    -0.00030745    -0.0025288    -0.0016457
-0.0022698    0.0008089    -0.0004998    -0.00096156    -0.0026752
0.0080168    0.00046853    0.0011042    -0.00054847    -0.001535
-0.002089    -0.00090672    -0.00013177    0.0010736    -0.00070529
0.0036744    0.00021474    0.00050609    -0.00025138    -0.00070354

Columns 11 through 14:
-0.00018533    -0.0011534    -0.00013269    -0.058727
-0.00022875    -0.00076023    -0.00016378    -0.027931
-0.00021732    -0.0008637    -0.0001556    -0.036035
-0.00015562    -0.0014224    -0.00011142    -0.019213
-0.00025297    -0.00054088    -0.00018112    -0.01075
-0.00066951    -0.00030851    -0.00047936    -0.0060453
-6.6693e-005    -0.0022277    -4.7751e-005    -0.0082343
0.00025616    -0.0001414    -0.0006961    -0.0027708
```

主程序需调用的各个函数 (Markov):

```
function out =mat2qj(a)
if ~ismumeric(a) error('a 不是矩阵')
else
    s=size(a);
    out=cell(s);
    for i=1:s(1,1)
        for j=1:s(1,2)
            out(i,j)=[a(i,j),a(i,j)]];
        end
    end
end

function out =mkvjia(a,b)
warning off
if length(a)~=2 or length(b)~=2 error('错误的区间数')
```

```

else
out=[a(1,1)+b(1,1),a(1,2)+b(1,2)];
end

function out =mkvjia(a,t)
warming off
s1=size(a);
s2=size(t);
out=cell(s1);
if(s1(1,1)~=s2(1,1)) || (s1(1,2)~=s2(1,2))error('a 与 b 不能相减')
else
    for i=1:s1(1,1)
    for j=1:s1(1,2)
        Aa=cell2mat(a(i,j));
        Tt=cell2mat(t(i,j));
        Out(i,j)=[aa(1,1)-tt(1,1)-tt(1,2)];
    End
    End
End

function out =mkvcheng(a,b)
warming off
x=size(a);
y=size(b);
if~iscell(a) || ~iscell(b)error('错误的输入')
elseif (x(1,1)==y(1,1)) && (x(1,2)==y(1,2))
    n=cell2mat(a);
    n=cell2mat(b);
    if (m(1,1)>=0) && (m(1,2)>=0)
        If (n(1,1)>=0) && (n(1,2)>=0)
            Out={ [m(1,1)*n(1,1),m(1,2)*n(1,2)] };
        else if (n(1,1)<=0) && (n(1,2)<=0)
            Out={ [m(1,2)*n(1,1),m(1,1)*n(1,2)] };
        elseif (n(1,1)>n(1,2)) && (n(1,2)*n(1,2)<0)
            Out={ [m(1,1)*n(1,1),m(1,1)*n(1,2)] };
        elseif (n(1,1)<n(1,2)) && (n(1,1)*n(1,2)<0)
            Out={ [m(1,2)*n(1,1),m(1,2)*n(1,2)] };
        End
    elseif (m(1,1)<=0) && (m(1,2)<=0)
        If (n(1,1)>=0) && (n(1,2)>=0)
            Out={ [m(1,1)*n(1,2),m(1,2)*n(1,1)] };
        elseif (n(1,1)<=0) && (n(1,2)<=0)
            Out={ [m(1,2)*n(1,2),m(1,1)*n(1,1)] };
        elseif (n(1,1)>n(1,2)) && (n(1,2)*n(1,2)<0)
            Out={ [m(1,2)*n(1,2),m(1,2)*n(1,1)] };
        elseif (n(1,1)<n(1,2)) && (n(1,1)*n(1,2)<0)
            Out={ [m(1,1)*n(1,2),m(1,2)*n(1,1)] };
        end;
end;

```

```

elseif (m(1,1)<m(1,2)) && (m(1,1)*m(1,2)<0)
    if (n(1,1)>=0) && (n(1,2)>=0)
        out={ [m(1,1)*n(1,2),m(1,2)*n(1,2)] };
    elseif (n(1,1)<=0) && (n(1,2)<=0)
        out={ [m(1,2)*n(1,1),m(1,1)*n(1,1)] };
    elseif (n(1,1)>n(1,2)) && (n(1,1)*n(1,2)<0)
        out={ [0,0] };
    elseif (n(1,1)<n(1,2)) && (n(1,1)*n(1,2)<0)
        out={ [min(m(1,1)*n(1,2),m(1,2)*n(1,1)),max(m(1,1)*n(1,1),m(1,2))] };
    end;
elseif (m(1,1)>m(1,2)) && (m(1,1)*m(1,2)<0)
    if (n(1,1)>=0) && (n(1,2)>=0)
        out={ [m(1,1)*n(1,1),m(1,2)*n(1,2)] };
    elseif (n(1,1)<=0) && (n(1,2)<=0)
        out={ [m(1,2)*n(1,2),m(1,1)*n(1,1)] };
    elseif (n(1,1)>n(1,2)) && (n(1,1)*n(1,2)<0)
        out={ [max(m(1,1)*n(1,1),m(1,2)*n(1,2)),min(m(1,1)*n(1,2),m(1,2)*n(1,1))] };
    elseif (n(1,1)<n(1,2)) && (n(1,1)*n(1,2)<0)
        out={ [0,0] };
    end;
end
end
end

function out =mmkvcheng(a,b)
warning off
c=size(a);
d=size(b);
out=cell(c(1,1),d(1,2));
if c(1,2)~=d(1,1) || (~iscell(b)) error('a 与 b 不能相乘')
elseif iscell(a) && iscell(b)
for i=1:c(1,1)
    for j=1:d(1,2)
        sum=[0 0];
        for k=1:c(1,2)
            sum=mkvjia(sum,cell2mat(mkvcheng(a(i,k),b(k,j))));
        end
        out(i,j)=mat2cell(sum);
    end
end
end

function out=T(a)
s=size(a);
out=cell(s);
for i=1:s(1,1)

```

```

for j=1:s(1,2)
    if i==j
        out(i,j)=a(i,j);
    else
        out(i,j)=[o o];
    end
end
end
end

```

## 9.2 潮流计算的计算机算法

### 9.2.1 概述

潮流计算是电力系统中最基本的、应用最为广泛的一种电气计算。它的任务是对给定的运行条件和网络结构确定整个系统的运行状态，如各母线上的电压、网络中的功率分布以及功率损耗等。潮流计算的结果是电力系统稳定计算和故障计算的分析基础。在电力系统运行状态的实时监控和电网规划设计中，都需要进行大量而快速的潮流计算。本节讨论以计算机为工具的电力系统稳态潮流计算。利用计算机进行潮流计算从 20 世纪 50 年代中期就已开始，此后发展了各种不同的潮流算法。对计算机潮流算法的要求主要有算法的可靠性或者收敛性，计算的方便性和灵活性等。计算机潮流算法很多，本节主要介绍经典的牛顿-拉夫逊法和 P-Q 分解法。如果没有特殊说明，本节所以变量都用标么值表示。

### 9.2.2 潮流计算的数学模型

潮流计算所用的电力网络是由变压器、输电线路、电容器、电抗器等静止线性元件构成，并用集中参数表示的串联或者并联等值支路来模拟。对这样的线性网络进行分析，一般采用的是节点法，节点导纳矩阵表示的网络方程式为：

$$\dot{I}_i = Y\dot{U} \quad (9-1)$$

其展开式为

$$\dot{I}_i = \sum_{j=1}^n Y_{ij}\dot{U}_j \quad (9-2)$$

式中， $\dot{I}$  为节点注入电流向量； $\dot{U}$  为节点电压向量； $Y$  为节点导纳矩阵； $n$  为网络节点数。这就是潮流计算的基本方程式。下面以图 9-2 所示的三节点简单电力系统为例做进一步分析。

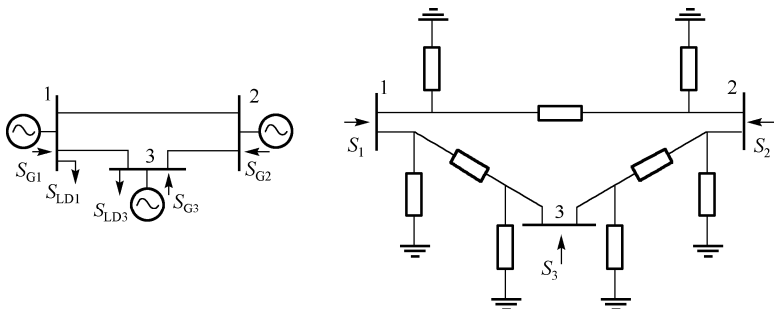


图 9-2 三节点简单电力系统



如上图所示的网络方程为

$$\dot{I}_i = Y_{i1}\dot{U}_1 + Y_{i2}\dot{U}_2 + Y_{i3}\dot{U}_3 \quad (i=1,2,3) \quad (9-3)$$

在工程实际中, 已知节点注入量往往不是节点电流而是节点功率, 为此将节点电流用节点功率和电压表示为

$$I_i = \frac{\dot{S}_i}{\dot{U}_i} = \frac{P_i - jQ_i}{U_i} \quad (9-4)$$

对于图 9-2 所示的系统

$$S_1 = S_{G1} - S_{LD1} = (P_{G1} - P_{LD1}) + j(Q_{G1} - Q_{LD1}) = P_1 + jQ_1 \quad (9-5)$$

$$S_2 = S_{G2} = P_{G2} + jQ_{G2} = P_2 + jQ_2 \quad (9-6)$$

$$S_3 = S_{G3} - S_{LD3} = (P_{G3} - P_{LD3}) + j(Q_{G3} - Q_{LD3}) = P_3 + jQ_3 \quad (9-7)$$

联立上面的式子可以得到

$$\frac{P_i - jQ_i}{U_i} = Y_{i1}\dot{U}_1 + Y_{i2}\dot{U}_2 + Y_{i3}\dot{U}_3 \quad (9-8)$$

这就是三节点系统的潮流方程。一般地,  $n$  个节点电力系统的潮流方程为

$$\frac{P_i - jQ_i}{U_i} = \sum_{j=1}^n Y_{ij}\dot{U}_j \quad (i=1,2,3,\dots,n) \quad (9-9)$$

或者

$$P_i + jQ_i = \dot{U}_i \sum_{j=1}^n \dot{Y}_{ij}\dot{U}_j \quad (i=1,2,3,\dots,n) \quad (9-10)$$

这是一组复数方程式, 而且是关于电压的非线性方程。将上述方程的实部和虚部分开, 对于每个节点可以得到两个实数方程。根据电力系统的运行条件, 按给定量的不同, 一般将节点分为以下三种类型。

(1) PQ 节点。这类节点的有功功率  $P$  和无功功率  $Q$  是给定的。节点电压的幅值和相角是待求量。通常变电站都是这种节点, 在一些情况下, 系统中某些发电厂送出的功率在一定时间内是固定时, 该发电厂母线也作为 PQ 节点。因此, 电力系统中的绝大多数节点属于这种类型。

(2) PV 节点。这类节点的有功功率  $P$  和电压的幅值是已知的, 节点的无功功率和电压的相角是待求量。这类节点必须有足够的可调无功功率容量, 用以维持给定电压幅值, 因而又称之为电压控制节点。一般是选择有一定无功储备的发电厂和具有可调无功电源设备的变电站作为 PV 节点, 在电力系统中这类节点是很少的。

(3) 平衡节点。在潮流分布算出以前, 网络中的功率损耗是未知的, 因此网络中至少有一个节点的有功功率不能给定, 这个节点承担了系统的有功功率平衡, 故称之为平衡节点。另外必须选择一个节点, 指定其电压的相角为零, 作为计算各节点电压相位的参考点, 这个节点称之为基准节点, 基准节点的电压幅值也是给定的, 为了计算上的方便, 常将平衡节点和基准节点选择同一个节点, 习惯上称之为平衡节点。平衡节点只有一个, 它的电压幅值和相位给定, 而其有功功率和无功功率是待求量。

通过方程的求解所得到的计算结果代表了潮流方程在数学上的一组解答，但这组解答所反映的系统运行状态在工程上是否具有实际意义还需要进行检验。因为电力系统运行必须满足一定技术上和经济上的要求。这些要求构成了潮流计算中的约束条件，常用的约束条件有：

① 所有节点电压幅值必须满足

$$U_{i\min} \leq U_i \leq U_{i\max} \quad (9-11)$$

② 所有电源节点的有功功率和无功功率必须满足

$$P_{Gi\min} \leq P_{Gi} \leq P_{Gi\max} \quad (9-12)$$

$$Q_{Gi\min} \leq Q_{Gi} \leq Q_{Gi\max} \quad (9-13)$$

③ 某节点间的相位差满足

$$|\theta_i - \theta_j| < |\theta_i - \theta_j|_{\max} \quad (9-14)$$

### 9.2.3 迭代法潮流计算

#### 1. 雅可比迭代法

设有  $n$  个联立的非线性代数方程

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \quad (9-15)$$

对第  $i$  个方程解出  $x_i$ ，而将上述方程组改为

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= g_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= g_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \end{aligned} \quad (9-16)$$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ x_n^{(k+1)} &= g_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \end{aligned} \quad (9-17)$$

因此，只要给出变量的初值  $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$  就可以按上式进行迭代，直到所有变量都满足下列条件为止

$$|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon \quad (9-18)$$

式中， $\varepsilon$  是预先给定的小正数，若满足上述不等式则迭代是收敛的，就把第  $k+1$  次迭代值作为该方程组的解。显然  $\varepsilon$  的值越小所得到的解就越接近方程的真解。

#### 2. 高斯-塞德尔迭代法

提高迭代收敛速度的另一种方法是对迭代公式作如下的改进

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= g_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= g_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ &\vdots \\ x_n^{(k+1)} &= g_n(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{n-1}^{(k+1)}, x_n^{(k)}) \end{aligned} \quad (9-19)$$

或者写成

$$x_i^{(k+1)} = g_i(x_1^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_i^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$$

这个方法的要点是把迭代得到的最新值  $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+2)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}$  立即用于计算下一个变量的值，而不是等到这一轮迭代结束之后。

### 3. 高斯-塞德尔法潮流计算

这里只介绍以节点导纳矩阵为基础的潮流计算。设系统中有  $n$  个节点，其中有  $m$  个 PQ 节点， $n-(m+1)$  个 PV 节点和一个平衡节点，平衡节点不参与迭代。从而可得出

$$\dot{U}_i = \frac{1}{Y_{ii}} \left[ \frac{P_i - jQ_i}{\dot{U}_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Y_{ij} \dot{U}_j \right] \quad (9-20)$$

再将上式改写成高斯-塞德尔的迭代格式

$$U_i^{(k+1)} = \frac{1}{Y_{ii}} \left[ \frac{P_i - jQ_i}{\dot{U}_i} - \sum_{j=1}^{i-1} Y_{ij} U_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n Y_{ij} U_j^{(k)} \right] \quad (9-21)$$

在应用这个迭代公式时，PQ 节点的功率是给定的，因此只要给出节点电压的初值就可以进行迭代计算。

对于 PV 节点，节点有功功率和电压幅值给定。但是节点的无功功率只在迭代开始时给定初值，此后的迭代值必须在迭代过程中逐次算出。因此对于 PV 节点，必须做以下几项计算。

(1) 修正节点电压。由上式求得节点电压，其幅值不一定等于给定的电压幅值。为了满足这个给定的条件，只保留电压的相角，而将其幅值直接取为给定值，即令

$$\dot{U}_i^{(k)} = U_{is} \angle \theta_i^{(k)} \quad (9-22)$$

(2) 计算节点无功功率。可按下列等式计算

$$Q_i^{(k)} = I_m \left[ U_i^{(k)} \left( \sum_{j=1}^{i-1} Y_{ij} U_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^n Y_{ij} U_j^{(k)} \right) \right] \quad (9-23)$$

(3) 无功功率越限检查。对由上一步算出的无功功率需按以下的不等式进行越限检验

$$Q_{i\min} < Q_i^{(k)} < Q_{i\max} \quad (9-24)$$

如果  $Q_i^{(k)} > Q_{i\max}$ ，则令  $Q_i^{(k)} = Q_{i\max}$ ；如果  $Q_i^{(k)} < Q_{i\min}$ ，则令  $Q_i^{(k)} = Q_{i\min}$ 。

做完上述三项计算之后，才可以计算节点电压的新值。

迭代收敛的判据是

$$\max \left\{ \left| U_i^{(k+1)} - U_i^{(k)} \right| \right\} < \varepsilon \quad (9-25)$$

迭代结束后，还要算出平衡节点的功率和网络中功率的分布。输电线的功率计算公式如下

$$S_{ij} = P_{ij} + jQ_{ij} = U_{ij} \dot{I}_{ij} = U_i^2 \dot{y}_{i0} + \dot{U}_i (\dot{U}_i - \dot{U}_j) \dot{y}_{ij} \quad (9-26)$$

### 9.2.4 牛顿法潮流计算

设有单变量非线性方程

$$f(x) = 0 \quad (9-27)$$

求解此方程时, 先给出解的近似值  $x^{(0)}$ , 它与真解的误差为  $\Delta x^{(0)}$ , 则  $x = x^{(0)} + \Delta x^{(0)}$  将满足上述方程即

$$f(x^{(0)} + \Delta x^{(0)}) = 0 \quad (9-28)$$

将上式左边的函数在  $x^{(0)}$  处展成泰勒级数, 可得

$$f(x^{(0)} + \Delta x^{(0)}) = f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})\Delta x^{(0)} + f''(x^{(0)})\frac{(\Delta x^{(0)})^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x^{(0)})\frac{(\Delta x^{(0)})^n}{n!} + \cdots$$

式中,  $f'(x^{(0)}), \dots, f^{(n)}(x^{(0)})$  分别为  $f(x)$  在  $x^{(0)}$  处的各阶导数。

如果差值  $\Delta x^{(0)}$  很小, 对上式右端  $\Delta x^{(0)}$  的二次及以上阶次的各项均可略去。于是可以简化成

$$f(x^{(0)} + \Delta x^{(0)}) = f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})\Delta x^{(0)} = 0 \quad (9-29)$$

这是对于变量的修正量  $\Delta x^{(0)}$  的线性方程式, 也称为修正方程式。解此方程可得修正量

$$\Delta x^{(0)} = -\frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})} \quad (9-30)$$

用所得的  $\Delta x^{(0)}$  去修正近似解, 便得

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x^{(0)} = x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})} \quad (9-31)$$

由此我们可以得到迭代的通式

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \quad (9-32)$$

迭代过程中收敛的判断依据为

$$|f(x^{(k)})| < \varepsilon_1 \quad (9-33)$$

或者

$$|\Delta x^{(k)}| < \varepsilon_2 \quad (9-34)$$

其中,  $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$  为预先给定的任意小的正数。

应用牛顿法求解多变量非线性方程时, 假定已给出各变量的初值  $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ , 令  $\Delta x_1^{(0)}, \Delta x_2^{(0)}, \dots, \Delta x_n^{(0)}$  分别作为各变量的修正量, 使其满足下列方程组

$$\begin{aligned} f_1(x_1^{(0)} + \Delta x_1^{(0)}, x_2^{(0)} + \Delta x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n^{(0)}) &= 0 \\ f_2(x_1^{(0)} + \Delta x_1^{(0)}, x_2^{(0)} + \Delta x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n^{(0)}) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1^{(0)} + \Delta x_1^{(0)}, x_2^{(0)} + \Delta x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n^{(0)}) &= 0 \end{aligned} \quad (9-35)$$

将上式中的  $n$  个多元函数在初始值附近分别展成泰勒级数, 并略去还有  $\Delta x_1^{(0)}, \Delta x_2^{(0)}, \dots, \Delta x_n^{(0)}$  的二次及以上阶次的各项, 使得

$$\begin{aligned} f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \bigg|_0 \Delta x_1^{(0)} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \bigg|_0 \Delta x_2^{(0)} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \bigg|_0 \Delta x_n^{(0)} &= 0 \\ f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \bigg|_0 \Delta x_1^{(0)} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \bigg|_0 \Delta x_2^{(0)} + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \bigg|_0 \Delta x_n^{(0)} &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \bigg|_0 \Delta x_1^{(0)} + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \bigg|_0 \Delta x_2^{(0)} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \bigg|_0 \Delta x_n^{(0)} &= 0 \end{aligned} \quad (9-36)$$

上述方程式是修正量  $\Delta x_1^{(0)}, \Delta x_2^{(0)}, \dots, \Delta x_n^{(0)}$  的线性方程组, 称为牛顿法的修正方程组, 也可以写成矩阵的形式。利用高斯消去法或者三角分解法可以解出修正量  $\Delta x_1^{(0)}, \Delta x_2^{(0)}, \dots, \Delta x_n^{(0)}$ 。然后对近似解进行修正

$$x_i^{(1)} = x_i^{(0)} + \Delta x_i^{(0)} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

如此重复迭代, 在进行第  $k+1$  次迭代时, 求解修正方程式

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \bigg|_k & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \bigg|_k & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \bigg|_k \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \bigg|_k & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \bigg|_k & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \bigg|_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \bigg|_k & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \bigg|_k & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \bigg|_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(k)} \\ \Delta x_2^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta x_n^{(k)} \end{bmatrix} \quad (9-37)$$

得到修正量  $\Delta x_1^{(k)}, \Delta x_2^{(k)}, \dots, \Delta x_n^{(k)}$  并对各变量进行修正

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta x_i^{(k)} \quad (9-38)$$

也可以对上述两个方程缩写为

$$F(X^K) = -J^{(K)} \Delta X^{(K)} \quad (9-39)$$

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \Delta X^{(k)} \quad (9-40)$$

式中,  $X$  和  $\Delta X$  分别是由  $n$  个变量和修正量组成的  $n$  维列向量;  $F(X)$  是由  $n$  个多元函数组成的  $n$  维向量;  $J$  是  $n$  行  $n$  列的方阵, 称为雅克比矩阵, 在迭代过程满足的判断为

$$\max \left\{ \left| f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \right| \right\} < \varepsilon_1 \quad (9-41)$$

$$\text{或} \max \left\{ \left| \Delta x_i^{(k)} \right| \right\} < \varepsilon_2 \quad (9-42)$$

式中,  $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$  为预先给定的任意小的正数。

牛顿法求解还分为直角坐标求法、极坐标求法等, 在这里就不做进一步描述了。

### 9.2.5 P-Q 分解法潮流计算

为了改进牛顿法在内存占用量及计算速度方面的不足，P-Q 分解法根据电力系统实际运行的物理特点，对牛顿法修正方程进行合理简化，它无论在内存占有量还是计算速度都比牛顿法有很大的改进，是目前计算速度最快的潮流计算方法。

在交流高压电网中，输电线的电抗要比电阻大得多，系统中有功功率的变化主要受电压相位的影响，无功功率的变化则主要受母线电压幅值变化的影响，在修正方程的系数矩阵中，偏导数  $\frac{\partial \Delta P}{\partial \Delta U}$  和  $\frac{\partial \Delta Q}{\partial \Delta \theta}$  的数值相对偏导数  $\frac{\partial \Delta P}{\partial \Delta \theta}$  和  $\frac{\partial \Delta Q}{\partial \Delta U}$  是相当小的。作为简化的第一步这样就可以得到

$$\begin{aligned}\Delta P &= -H \Delta \theta \\ \Delta Q &= -L V_{D2}^{-1} \Delta U\end{aligned}\quad (9-43)$$

这样简化大大节省了机器内存和计算时间，但是矩阵  $H$  和  $L$  的元素都是节点电压幅值和相位差的函数，其数值在迭代过程中是不断变化的。算法最关键的一步在于，把系数矩阵  $H$  和  $L$  化成常数对称矩阵，其根据如下：

(1) 一般情况下，线路两端的电压的相位差不大，因此认为

$$\cos \theta_{ij} \approx 1, \quad G_{ij} \sin \theta_{ij} \ll B_{ij} \quad (9-44)$$

(2) 与系统各节点无功功率相应的导纳  $\frac{Q_i}{V_i^2}$  通常远小于该节点自导纳的虚部

$$\frac{Q_i}{U_i^2} \ll B_{ii} \quad \text{或} \quad Q_i \ll U_i^2 B_{ii} \quad (9-45)$$

则矩阵  $H$  和  $L$  各元素的表达式可简化成

$$\begin{aligned}H_{ij} &= U_i U_j B_{ij} & (i, j = 1, 2, \dots, n-1) \\ L_{ij} &= U_i U_j B_{ij} & (i, j = 1, 2, \dots, m)\end{aligned}\quad (9-46)$$

而系数矩阵  $H$  和  $L$  则可以分别写成

$$\begin{aligned}H &= \begin{bmatrix} U_1 B_{11} U_1 & U_1 B_{12} U_2 & \cdots & U_1 B_{1,n-1} U_{n-1} \\ U_2 B_{21} U_1 & U_2 B_{22} U_2 & \cdots & U_2 B_{2,n-1} U_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{n-1} B_{n-1,1} U_1 & U_{n-1} B_{n-1,2} U_2 & \cdots & U_{n-1} B_{n-1,n-1} U_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} U_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & U_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & U_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1,n-1} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n-1,1} & B_{n-1,2} & \cdots & B_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & U_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & U_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= U_{D1} B' U_{D1}\end{aligned}\quad (9-47)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \begin{bmatrix} U_1 B_{11} U_1 & U_1 B_{12} U_2 & \cdots & U_1 B_{1m} U_m \\ U_2 B_{21} U_1 & U_2 B_{22} U_2 & \cdots & U_2 B_{2m} U_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_m B_{m1} U_1 & U_m B_{m2} U_2 & \cdots & U_m B_{mm} U_m \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} U_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & U_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & U_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & U_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & U_m \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{U}_{D2} \mathbf{B}'' \mathbf{U}_{D2}
\end{aligned} \tag{9-48}$$

将  $\mathbf{H}$  和  $\mathbf{L}$  系数矩阵代入修正方程可得

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{P} &= -\mathbf{U}_{D1} \mathbf{B}' \mathbf{U}_{D1} \Delta \boldsymbol{\theta} \\
\Delta \mathbf{Q} &= -\mathbf{U}_{D2} \mathbf{B}'' \Delta \mathbf{U}
\end{aligned} \tag{9-49}$$

用  $\mathbf{U}_{D1}^{-1}$ ,  $\mathbf{U}_{D2}^{-1}$  分别左乘两式可得

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{D1}^{-1} \Delta \mathbf{P} &= -\mathbf{B}' \mathbf{U}_{D1} \Delta \boldsymbol{\theta} \\
\mathbf{U}_{D2}^{-1} \Delta \mathbf{Q} &= -\mathbf{B}'' \Delta \mathbf{U}
\end{aligned} \tag{9-50}$$

这就简化了修正方程式，它们也可展成

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta P_1}{U_1} \\ \frac{\Delta P_2}{U_2} \\ \vdots \\ \frac{\Delta P_{n-1}}{U_{n-1}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1, n-1} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2, n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n-1,1} & B_{n-1,2} & \cdots & B_{n-1, n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \Delta \theta_1 \\ U_2 \Delta \theta_2 \\ \vdots \\ U_{n-1} \Delta \theta_{n-1} \end{bmatrix} \tag{9-51}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta Q_1}{U_1} \\ \frac{\Delta Q_2}{U_2} \\ \vdots \\ \frac{\Delta Q_m}{U_m} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \vdots \\ \Delta U_m \end{bmatrix} \tag{9-52}$$

在这两个修正方程中，系数矩阵都是由节点导纳矩阵的虚部构成，只是阶次不同，矩阵的  $\mathbf{B}'$  为  $n-1$  阶，不含平衡节点对应的行和列，矩阵  $\mathbf{B}''$  为  $m$  阶，不含平衡节点和 PV 节点所对应的行和列。由于修正方程的系数矩阵为常数矩阵，只要做一次三角分解，即可反复使用，结合采用稀疏技巧，还可进一步地节省机器内存和计算时间。

在实际 P-Q 分解法程序中，为了提高收敛速度，对  $\mathbf{B}'$  和  $\mathbf{B}''$  的构成做了下面的一些修改：

(1) 在  $\mathbf{B}'$  中尽量去掉那些对有功功率及电压相位影响较小的因素，如果略去变压器非标

准变比和输电线路充电电容的影响；在  $B''$  中尽量去掉那些对无功功率及电压幅值影响较小的因素，如略去输电线路电阻的影响。

(2) 为了减少在迭代过程中无功功率及节点电压幅值对由功迭代的影响，将式 (9-20) 右端  $V$  的各元素均置为标么值 1，即令  $V$  为单位矩阵。

(3) 当潮流程序要求考虑负荷静态特性时， $B''$  中对角元素除导纳矩阵对角元素的虚部以外，还要附加反应负荷静态特性的部分，而  $B'$  中各元素和潮流程序是否考虑负荷静态特性无关。

在计算机计算潮流的具体实现过程如图 9-3 所示。

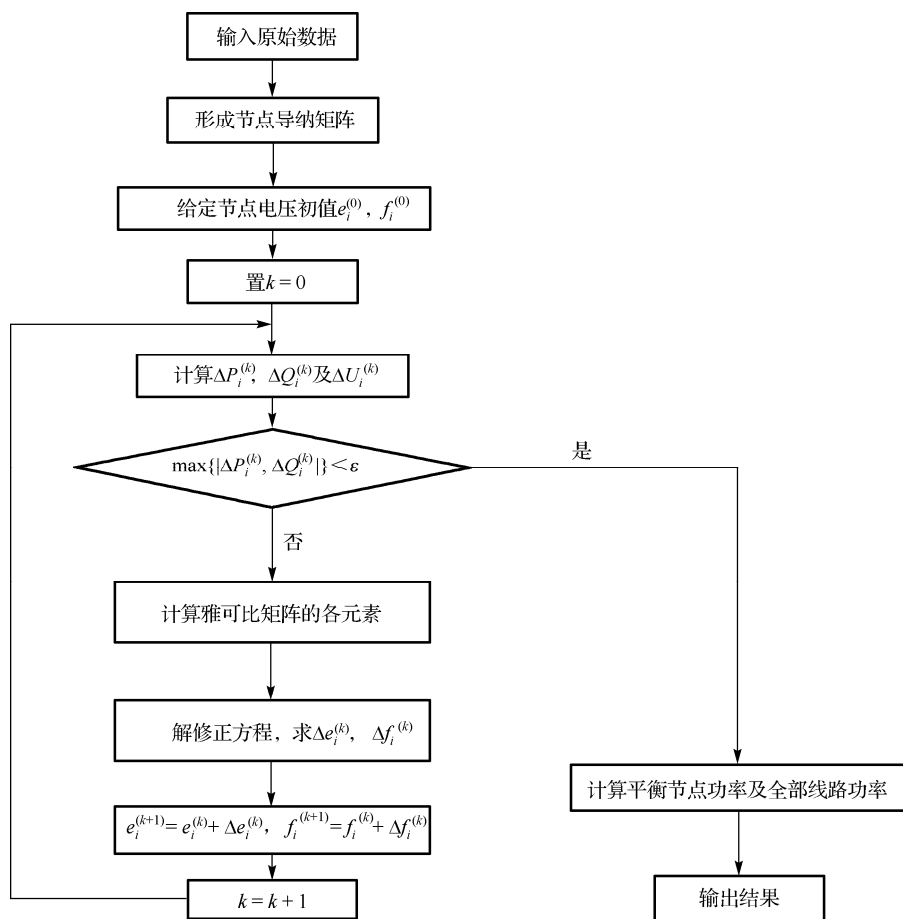


图 9-3 计算机计算潮流流程图

## 9.3 稀疏技术

### 9.3.1 稀疏矩阵简介

稀疏矩阵 (Sparse Matrix) 是大部分元素为零，并且零元素的位置和数值都没有规律的矩阵。利用矩阵的稀疏性可以大幅度提高计算效率，这是因为：

① 零的四则运算是算就知道结果的“零运算”，计算中没有必要考虑，这样可以大幅度提高运算速度。



② 零元素的值已知，没必要存储，这样可以大幅度减少存储需求。

本节介绍线性方程组  $AX=B$  的稀疏技术。稀疏技术由四部分组成：稀疏矩阵存储技术、稀疏矩阵计算技术、稀疏向量计算技术和优化编号技术。

稀疏矩阵存储技术的核心是“排零”。排除所有的零元素，将所有非零元素“挤实”地存储起来，并形成有效的数据检索手段。

稀疏矩阵计算技术的核心是“避零”。在压缩存储的基础上遵循“遇零不做”的原则，所有运算都是非零元素之间的运算。

稀疏向量计算技术的核心是“用零”。在右边向量是稀疏向量以及不需要计算完全解向量的情况下，利用稀疏向量中的零元素避免零运算。稀疏向量计算技术以稀疏矩阵存储技术和稀疏矩阵计算技术为基础。

优化编号技术的核心是“增零”。在优化方程组解向量  $X$  的元素顺序之后，可以减少矩阵消去中非零“填充元素”的出现，使矩阵更加稀疏。对于网络的节点方程，优化编号技术与节点编号技术等价。

### 9.3.2 稀疏矩阵存储技术

本节的三元组表法和十字链表法是两种最基本的稀疏压缩存储方法。

#### 1. 三元组表法

三元组表将稀疏矩阵的非零元素“挤实”后置放在一维数组中，是最简单和最基本的稀疏矩阵存储方法。

行码  $i$ 、列码  $j$  和元素  $a_{ij}$  的数组构成一个非零元素的三元组，即

$$(i, j, a_{ij}) \Rightarrow a_{ij} \neq 0 \quad (9-53)$$

图 9-4 是名为 Element 的三元组数据结构。其中，row 和 column 是非零元素的行码和列码，value 是非零元素的数值。根据情况，value 可以定义为 float、double 或者 int 等类型。

矩阵中所有非零元素的三元组构成的一维压缩数据表叫三元组表。

图 9-5 是命名为 SparMatrix 的三元组表结构数据。其中，rows 和 columns 是稀疏矩阵的行数和列数，nums 是稀疏矩阵非零元素的数量，data 是三元组表。MAXSIZE 是三元组表的最大容量，可以根据情况设定。

```
typedef struct
{
    Int row,column;
    Float value;
}Element;
```

图 9-4 三元组结构图

```
typedef struct
{
    Int rows,columns,nums;
    Element data[MAXSIZE];
}SparMatrix;
```

图 9-5 三元组表结构

#### 2. 十字链表法

有时稀疏矩阵的情况会变化：零元素变为非零元素，非零元素变为零元素。此时采用三元组表方法就不够方便，因为需要重新形成单链表形式的三元组表。

十字链表法为矩阵的每行每列都设置单独链表，分别叫行链和列链。这样，稀疏矩阵的任何非零元素将会同时出现在相应的行链和列链中，如同在一个十字路口一样。

采用数据的术语，矩阵的非零元素叫元素结点。

9.3.3 对角元素不稀疏的稀疏矩阵存储

网络矩阵的对角线不稀疏，稀疏的是非对角部分。本节讨论对角元素不稀疏的稀疏矩阵存储方法，此方法也是电力网络计算中常用的稀疏矩阵存储方法。

1. 一维压缩存储

构造如下两个一维结构数组：

- (1) 结构数组 AD 存放矩阵  $A$  的对角；
- (2) 结构数组 AM 压缩存放矩阵  $A$  非零的非对角元素。

图 9-6(a)是结构数组 AD 的数据结构 diagMatrix。在矩阵  $A$  为实数矩阵时，diagMatrix 只有 value 域，存放对角元素数值。若  $A$  是复数矩阵，可以设计实部和虚部两个数值域，也可以采用复数值域。图 9-6(b)是结构数组 AM 的数据结构 undiagMatrix，包括两个数值域：浮点域 value 存放非对角元素的数值，整数域 columns 存放非对角元素的列码。当然也可以将其改造为复数形式。

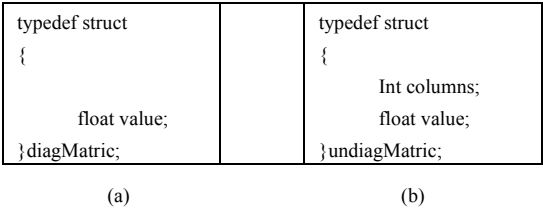


图 9-6 结构数组 AD 的数据结构 diagMatrix

结构数组 AD 和 AM 的数据存放规则如下：

- ① 结构数组 AD：按行码（或列码）顺序依次存放矩阵  $A$  的对角元素。
- ② 结构数组 AM：按由小到大的行序和列序存放矩阵  $A$  非零的非对角元素。即按列码由小到大的顺序，首先存放第一行所有的非对角元素，再存放第 2 行所有的非对角非零元素，……，如此下去直到最后 1 行。

2. 数据检索方式

结构数组 AD 可直接检索，因为其第  $i$  个单元既是矩阵  $A$  的第  $i$  个对角元素。

数据结构 undiagMatrix 描述了非零非对角元素的列码和数值，但没描述行码，因此结构数组 AM 不能唯一确定非零非对角元素的矩阵位置。为了检索非零非对角元素，构造结构数组 AM 的行检索数组 ARI，定义：

- ① 按行码顺序存放矩阵  $A$  每行首个非零非对角元素在数组 AM 中的地址；
- ② 最后一个元素=矩阵  $A$  非零非对角元素的数量+1。

根据定义，矩阵  $A$  第  $i$  行非零非对角元素的数量为

$$\text{Number}(i)=\text{ARI}[i+1]-\text{ARI}[i] \quad (i=1,2,3,...,n) \tag{9-54}$$

数组结构 undiagMatrix 的 column 域提供了列检索功能。行检索数组 ARI 结合 AM 的

column 域构成了完整的非零非对角元素的检索方法。显然这是行检索为主,列检索服从行检索的方式。

检索任意非对角元素  $a_{ij}$  的方法如下:

① 行检索范围:用  $AIR[i]$ 和  $AIR[i+1]-1$  确定第  $i$  行非零非对角元素在  $AM$  中的范围。

② 列检索:在行检索范围内逐个查询  $AM$  中元素的列码  $column$ , 若存在  $column=j$  的情况,表明存在非零的  $a_{ij}$ , 否则  $a_{ij}$  是零。

### 9.3.4 三角分解技术

矩阵  $A$  的 LU 分解形式为

$$A=LDU$$

其中,下三角矩阵  $L$  和上三角矩阵  $U$  的对角元素都为 1; 矩阵  $D$  是对角矩阵。

#### 1. 数据结构

稀疏矩阵  $A$  的三角分解矩阵  $L$  和  $U$  也是稀疏矩阵,而对角矩阵  $D$  是非稀疏矩阵,因此可以采用上节的压缩存储方法。

(1) 采用数据结构  $DiagMatrix$  定义结构数组  $DM$ , 存放对角矩阵  $D$  的元素。

(2) 采用数据结构  $unDiagMatrix$  定义结构数组  $LM$  和  $UM$ 。 $LM$  压缩存放下三角矩阵  $L$  的非零元素, $UM$  压缩存放上三角矩阵  $U$  的非零元素。

(3) 矩阵  $L$  和矩阵  $U$  的对角元素都是 1, 无须存储。

(4) 与矩阵  $A$  的行检索数组  $ARI$  一样,定义行检索数组  $LRI$  和  $URI$ , 分别用于矩阵  $L$  和  $U$  的按行检索。

#### 2. 基本流程

在按行三角分解的模式下,矩阵  $L$  的元素为

$$l_{ij} = \frac{1}{d_j} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right) \quad (j=1,2,\cdots,i-1; i=2,3,\cdots,n) \quad (9-55)$$

矩阵  $D$  的元素为

$$d_i = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{ki} \quad (i=1,2,3,\cdots,n) \quad (9-56)$$

矩阵  $U$  的元素为

$$u_i = \frac{1}{d_i} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{ki} \right) \quad (j=i+1,i+2,\cdots,n; i=1,2,3,\cdots,n-1) \quad (9-57)$$

其中,符号  $l_{ij}, u_{ij}, d_j$  和  $a_{ij}$  分别表示  $L, U, D$  和  $A$  的元素。

上述公式不含  $L$  和  $U$  的对角元素,因为  $L$  和  $U$  的对角元素都是 1。

根据上面三个公式,得到矩阵  $A$  三角分解的基本流程,如图 9-7 所示。

其中,内嵌部分(1)的流程改进如图 9-8 所示,内嵌部分(3)的流程改进如图 9-9 所示。

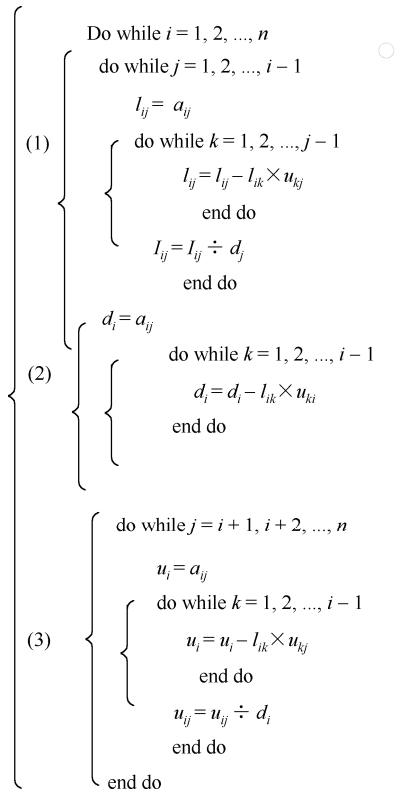
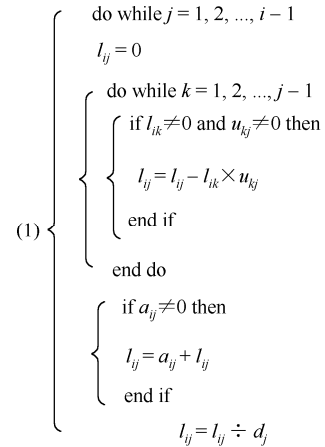
图 9-7 矩阵  $A$  三角分解的基本流程

图 9-8 内嵌部分 (1) 的流程改进

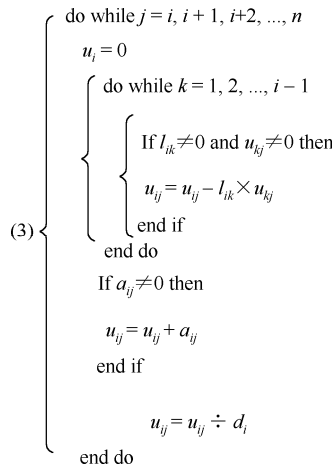


图 9-9 内嵌部分 (3) 的流程改进

### 9.3.5 稀疏矩阵方程的计算

#### 1. 公式和数据结构

设  $F$  为中间向量。这样，线性方程组  $AX = B$  的三角分解形式为

$$LF = B$$

$$DUX = F$$

令

$$\tilde{L} = L - E$$

$$\tilde{U} = U - E$$

其中,  $E$  为单位矩阵。这样, 中间向量  $F$  和解向量  $X$  分别为

$$\begin{aligned} F &= B - \tilde{L}F \\ X &= D^{-1}F - \tilde{U}X \end{aligned} \quad (9-58)$$

具体地, 中间向量的任意元素  $f_i$  为

$$f_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} f_j \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (9-59)$$

解向量的任意元素  $x_i$  为

$$x_i = \frac{1}{d_i} f_i^n - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j \quad (i=n, n-1, \dots, 1) \quad (9-60)$$

定义浮点数组 BV, XV 和 FV, 分别存储向量  $B$ ,  $X$  和  $F$ 。

## 2. 基本程序

### (1) 中间向量计算程序

中间向量计算程序命名为 solutionF。按照式 (9-58), 中间向量  $F$  的计算从第 1 行开始到最后一行逐渐进行。在每行的计算中, 通过行检索数组 LRI 在压缩数组 LM 中提取下三角矩阵的非对角元素  $l_{ij}$ 。

基本程序如图 9-10 所示。

```
void solutionF()
{
    for (int i=1; i<=n; i++)
    {
        FV[i]=BV[i];
        for (int k=LRI[i]; k<LRI[i+1]; k++)
        {
            int j=LM[k].column;
            FV[i]=FV[i]-LM[k].value*FV[j];
        }
    }
};
```

图 9-10 solutionF

### (2) 解向量计算程序

程序命名为 solutionX。在 solutionF 之后, 利用中间向量  $F$  的计算结果计算解向量  $X$ 。

按照式 (9-58), 解向量  $X$  的计算自上而下: 从第  $n$  行开始到第 1 行。每行计算通过行检索数组 URI 在压缩数组 UM 中提取上三角矩阵的非对角元素  $u_{ij}$ 。基本程序如图 9-11 所示。

```

void solutionX()
{
    for (int i=n;i>=n; i--)
    {
        XV[i]=FV[i]/DM[i];
        for (int k=URI[i];k<URI[i+1];k++)
        {
            int j=UM[k].column;
            XV[i]=XV[i]+UM[k].value*XV[j];
        };
    };
};

```

图 9-11 solutionX

### 9.3.6 稀疏向量矩阵

#### 1. 稀疏向量计算技术

对线性方程组  $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ ，如下的稀疏向量叫关于元素  $b_i$  的单元元素右边向量

$$\mathbf{B}(i) = (0 \cdots 0 \ b_i \ 0 \cdots)^T$$

稀疏的单元元素右边向量  $\mathbf{B}(i)$  导致中间向量  $\mathbf{F}$  的稀疏性。考查式 (9-59)，即

$$f_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} f_j \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

如果  $f_i=0$ ，则无论  $l_{ij}$  如何取值，都有  $l_{ij} f_j = 0$ 。因此上式为

$$f_i = b_i - \sum_{\substack{j<i \\ l_{ij} f_j \neq 0}} l_{ij} f_j - \sum_{\substack{j<i \\ f_j = 0}} l_{ij} f_j = b_i - \sum_{\substack{j<i \\ l_{ij} f_j \neq 0}} l_{ij} f_j \quad (i=1,2,\cdots,n) \quad (9-61)$$

**结论1** 式 (9-59) 中的运算  $l_{ij} f_j$ ，如果  $f_i=0$ ，必然出现零运算  $l_{ij} f_j = 0$ ，将  $l_{ij}$  看作零不影响计算结果。

据此，对于单元元素右边向量  $\mathbf{B}(i)$ ，式 (9-59) 的矩阵形式为

$$\mathbf{F}(i) = \mathbf{B}(i) - \tilde{\mathbf{L}} \mathbf{F}(i) \quad (9-62)$$

其中， $\mathbf{F}(i)$  是  $\mathbf{B}(i)$  决定的中间向量，是一个稀疏向量。

由于  $\mathbf{F}(i)$  稀疏，可以不考虑下三角矩阵  $\tilde{\mathbf{L}}$  中参与零运算的非零元素。这样上式为

$$\mathbf{F}(i) = \mathbf{B}(i) - \tilde{\mathbf{L}}(i) \mathbf{F}(i) \quad (9-63)$$

其中，下三角矩阵  $\tilde{\mathbf{L}}(i)$  是矩阵  $\tilde{\mathbf{L}}$  中参与零运算的非零元素都置零的矩阵，叫关于  $b_i$  的下三角子矩阵。很显然， $b_i$  的下三角子矩阵  $\tilde{\mathbf{L}}(i)$  比矩阵  $\tilde{\mathbf{L}}$  更加稀疏。

假设只求计算解向量的元素  $x_k$ ，对其他解向量的元素不感兴趣。根据式 (9-60)，有

$$x_k = \frac{1}{d_k} f_{ik}^n - \sum_{j=k+1}^n u_{ij} x_j$$

显然， $x_k$  取决于  $u_{ij} \neq 0$  关联的  $x_j$ ，即

$$x_k = \frac{1}{d_k} f_{ik}^n - \sum_{\substack{j>k \\ u_{ij}x_j \neq 0}} u_{ij}x_j$$

因此, 计算  $x_k$  就必须计算这样的  $x_j$ 。而  $x_j$  为

$$x_j = \frac{1}{d_j} f_j^n - \sum_{\substack{l>j \\ u_{jl}x_l \neq 0}} u_{lj}x_l$$

因此  $x_j$  又取决于  $u_{jl} \neq 0$  对应的  $x_l$ 。如此下去, 最后可以得到计算  $x_k$  需要的所有解向量元素组成的向量  $\mathbf{X}(k)$ , 它与完全的解向量  $\mathbf{X}$  不同, 是解向量  $\mathbf{X}$  的部分元素组成的稀疏向量。这样得到关系式

$$x_i = \frac{1}{d_i} f_i^n - \sum_{\substack{l>j \\ x_j \in \mathbf{X}(k)}} u_{ij}x_j \quad (i \geq k, x_i \in \mathbf{X}(k)) \quad (9-64)$$

**结论 2** 若只谋求计算解向量的元素  $x_k$ , 如果  $x_j \notin \mathbf{X}(k)$ , 那么式 (9-60) 中的运算  $u_{ij}x_j$  对计算  $x_k$  没有任何影响, 因此可将  $u_{ij}$  置零, 这样  $u_{ij}$  的运算  $u_{ij}x_j$  转化为零运算。

据此, 对向量  $\mathbf{X}(k)$ , 式 (9-60) 的矩阵形式为

$$\mathbf{X}(k) = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{F}(k) - \tilde{\mathbf{U}}(k)\mathbf{X}(k) \quad (9-65)$$

其中,  $\mathbf{F}(k)$  是  $\mathbf{X}(k)$  决定的中间向量, 它是一个稀疏向量。

由于  $\mathbf{F}(k)$  和  $\mathbf{X}(k)$  稀疏, 可以不考虑上三角矩阵  $\tilde{\mathbf{U}}$  中参与零运算的非零元素。这样有

$$\mathbf{X}(k) = \mathbf{D}^{-1}(k)\mathbf{F}(k) - \tilde{\mathbf{U}}(k)\mathbf{X}(k) \quad (9-66)$$

其中,  $\mathbf{D}(k)$  是将对角矩阵中参与零运算的对角元素都置零的矩阵;  $\tilde{\mathbf{U}}(i)$  是将矩阵  $\tilde{\mathbf{U}}$  中参与零运算的元素都置零的矩阵, 叫关于  $x_k$  的上三角子矩阵。

很显然,  $x_k$  的上三角矩阵  $\tilde{\mathbf{U}}(i)$  比矩阵  $\tilde{\mathbf{U}}$  更加稀疏。

上面的方法可以推广到多于两个非零元素的右边向量的情况。比如右边向量存在两个非零向量元素时, 有

$$\mathbf{F}(i, j) = \mathbf{B}(i, j) - \tilde{\mathbf{L}}(i, j)\mathbf{F}(i, j) \quad (9-67)$$

对于多于两个解向量元素的情况, 也是如此。比如在两个解向量元素时, 有

$$\mathbf{X}(i, j) = \mathbf{D}^{-1}(i, j)\mathbf{F}(i, j) - \tilde{\mathbf{U}}(i, j)\mathbf{X}(i, j) \quad (9-68)$$

## 2. 三角子矩阵的计算

(1) 获得下三角子矩阵  $\tilde{\mathbf{L}}(i)$

采用如下方法在矩阵  $\tilde{\mathbf{L}}$  中寻找非零元素。在矩阵  $\tilde{\mathbf{L}}$  中只保留这些非零元素而其他元素都置零的矩阵就是关于  $b_i$  的下三角矩阵  $\tilde{\mathbf{L}}(i)$ 。

- ① 矩阵  $\tilde{\mathbf{L}}$  对角位置  $\tilde{\mathbf{L}}(i, i)$  下面所有的非零元素  $l_{ki} (k > i)$ ;
- ② 元素  $l_{ki}$  所在行对角位置  $\tilde{\mathbf{L}}(k, k)$  下面所有的非零元素  $l_{jk} (j > k)$ ;
- ③ 元素  $l_{jk}$  所在行对角位置  $\tilde{\mathbf{L}}(j, j)$  下面所有的非零元素  $l_{ly} (l > j)$ ;

.....

这样的搜索终止于矩阵  $\tilde{\mathbf{L}}$  最后的对角位置  $\tilde{\mathbf{L}}(n,n)$ 。

(2) 获得上三角矩阵  $\tilde{\mathbf{U}}(i)$

采用如下方法在矩阵  $\tilde{\mathbf{U}}$  中寻找非零元素。在矩阵  $\tilde{\mathbf{U}}$  中只保留这些非零元素而其他元素都置零的矩阵就是关于  $x_i$  的上三角矩阵  $\tilde{\mathbf{U}}(i)$ 。

- ① 矩阵  $\tilde{\mathbf{U}}$  对角位置  $\tilde{\mathbf{U}}(i,i)$  下面所有的非零元素  $u_{ik} (k>i)$ ;
- ② 元素  $u_{ik}$  所在行对角位置  $\tilde{\mathbf{U}}(k,k)$  右边所有的非零元素  $u_{kj} (j>k)$ ;
- ③ 元素  $u_{kj}$  所在行对角位置  $\tilde{\mathbf{U}}(j,j)$  右边所有的非零元素  $u_{jl} (l>j)$ ;
- .....

这样的搜索终止于矩阵  $\tilde{\mathbf{U}}$  最后的对角位置  $\tilde{\mathbf{U}}(n,n)$ 。

为了便于三角子矩阵的搜索, 建议采用十字链表的稀疏矩阵存储方法。具体方法这里不再介绍。

### 9.3.7 网络演化

采用高斯消去法计算网络方程, 消去过程和回代过程表现为网络结构与参数的变化过程, 本章将这种变化过程叫网络演化。

三角分解法(包括 LU 分解法、LDR 分解法、平方根分解法和因子表法)是高斯消去法的变种形式。因此讨论伴随高斯消去法的网络演化过程具有普遍代表性。

在不考虑受控电源的情况下, 本节讨论伴随着高斯消去过程的网络演化问题。

#### 1. 节点的移去与恢复

间接关系: 设节点  $n_i$  与节点  $n_j$  邻接, 也与节点  $n_k$  邻接。如果节点  $n_j$  与节点  $n_k$  不邻接, 那么称节点  $n_j$  和节点  $n_k$  间接, 如图 9-12 所示。

邻接集合: 一个节点所有的邻接节点构成它的邻接集合。节点  $n_i$  的邻接集合用  $A_i$  表示。注意, 节点  $n_i$  邻接集合  $A_i$  不包括节点  $n_i$ 。

邻接集合的性质: 邻接集合  $A_i$  中的任意两个节点, 若不邻接, 必然通过节点  $n_i$  间接。

节点移去: 移去节点  $n_i$  是如下的接续行为。

- ① 移去节点  $n_i$ ;
- ② 移去节点  $n_i$  的关联支路;
- ③ 如果节点  $n_i$  的邻接集合  $A_i$  存在间接关系, 那么就通过增加新支路将间接关系转化为邻接关系。

增添支路: 在节点移去中增加的支路叫增添支路。

节点恢复: 恢复节点  $n_i$  是如下接续行为。

- ① 恢复节点  $n_i$ ;
- ② 恢复节点  $n_i$  的关联支路(包括增添支路)。

可逆移去和不可逆移去: 移去节点  $n_i$  再恢复之。若移去前与恢复后的网络结构相同, 移去节点  $n_i$  是可逆的。不可逆移去的原因是增添支路的出现。

节点  $n_i$  的移去: 在图 9-12(a)中, 节点  $n_j$ ,  $n_k$  和  $n_l$  构成节点  $n_i$  的邻接集合  $A_i$ 。在邻接集合  $A_i$  中, 节点  $n_k$  与节点  $n_l$  邻接, 节点  $n_j$  与  $n_k$  不邻接, 节点  $n_j$  与  $n_l$  也不邻接。移去  $n_i$  后出现了增添支



路 $\hat{b}_q$ ，将节点 $n_j$ 与节点 $n_k$ 转换成了邻接关系，出现了增添支路 $\hat{b}_r$ ，将节点 $n_j$ 与节点 $n_l$ 也转换成了邻接关系。这样，节点 $n_i$ 移去后，得到图9-12(b)所示的网络。此时节点减少1个，支路却增加2条。

节点 $n_i$ 的恢复：恢复节点 $n_i$ 后要恢复节点 $n_i$ 关联的3条支路。恢复节点 $n_i$ 前增添支路 $\hat{b}_q$ 和 $\hat{b}_r$ 已经存在，在节点 $n_i$ 恢复后它们依然存在，如图9-12(c)所示。

注意，图9-12(c)的网络与图9-12(a)不同：多了两条增添支路 $\hat{b}_q$ 和 $\hat{b}_r$ 。所以节点 $n_i$ 的移去不具有可逆性。

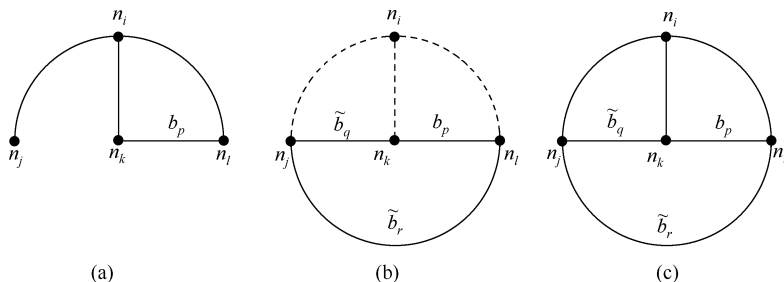


图9-12 节点移去与恢复

## 2. 网络的演化过程

网络的移去过程与恢复过程：

① 移去过程：按照确定的节点顺序逐个移去节点，直到剩下1个节点。

② 恢复过程：按照与移去过程相反的节点顺序逐个恢复节点，直到第一个节点被恢复。

演化过程：确定的1个移去过程和对应的恢复过程构成了网络的1个演化过程。

演化过程由一系列网络状态组成，定义如下的网络状态：

① 网络初态：节点移去过程的开始状态，记为 $C_n^{(0)}$ 。

② 网络终态：第1个节点已经被恢复的状态，记为 $\hat{C}_n^{(1)}$ 。

③ 移去状态：第 $i$ 个节点被移去的状态，记为 $C_n^{(i)}$ 。

④ 恢复状态：第 $i$ 个节点被恢复的状态，记为 $\hat{C}_n^{(i)}$ 。

移去过程要移去节点及其相关支路，可能出现增添支路。恢复过程不仅恢复网络原本的节点和支路，也要恢复增添支路。

可逆移去过程：由可逆移去构成的移去过程可逆。可逆移去过程对应的网络初态和网络终态一致，即

$$\hat{C}_n^{(1)} = C_n^{(0)} \quad (9-69)$$

不可逆移去过程：网络终态 $\hat{C}_n^{(1)}$ 与网络初态不同的移去过程。它的支路数量多于网络初态的支路数，多出的支路是移去过程产生的增添支路数量。

图9-13是网络演化过程的图示。

移去过程：从网络初态 $C_n^{(0)}$ 开始，第1个节点移去后得到移去状态 $C_n^{(1)}$ ，第2个节点移去后得到移去状态 $C_n^{(2)}$ ，以此下去，经过 $n-1$ 次节点移去后，得到只剩下1个节点的状态 $C_n^{(n-1)}$ 。

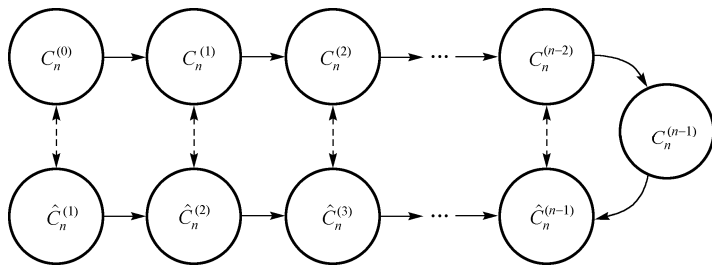


图 9-13 网络演化过程

恢复过程：从只有 1 个节点的网络状态  $C_n^{(n-1)}$  开始，第  $n-1$  个节点首先被恢复，第  $n-2$  个节点次之，以此下去，经过  $n-1$  次节点恢复，全部的节点被恢复，得到了网络终态  $\hat{C}_n^{(1)}$ 。

如果是可逆移去过程，必然满足如下关系

$$\hat{C}_n^{(i+1)} = C_n^{(i)} \quad (i=0,1,2,\cdots,n-1) \quad (9-70)$$

### 3. 稀疏向量技术与网络演化

以下面的节点方程为背景讨论稀疏向量技术

$$\begin{pmatrix} Y_{11}^n & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{16}^n & 0 & Y_{18}^n \\ 0 & Y_{22}^n & Y_{23}^n & 0 & 0 & 0 & Y_{27}^n & 0 \\ 0 & Y_{32}^n & Y_{33}^n & 0 & Y_{35}^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_{44}^n & 0 & 0 & Y_{47}^n & Y_{48}^n \\ 0 & 0 & Y_{53}^n & 0 & Y_{55}^n & Y_{56}^n & 0 & 0 \\ Y_{61}^n & 0 & 0 & 0 & Y_{65}^n & Y_{66}^n & 0 & Y_{68}^n \\ 0 & Y_{72}^n & 0 & Y_{74}^n & 0 & 0 & Y_{77}^n & 0 \\ Y_{81}^n & 0 & 0 & Y_{84}^n & 0 & Y_{86}^n & 0 & Y_{88}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ U_3^n \\ U_4^n \\ U_5^n \\ U_6^n \\ U_7^n \\ U_8^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1^n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9-71)$$

上面的方程只有一个节点电流源  $J_1^n$ ，要求计算节点电压  $U_3^n$ 。

图 9-14(a)是对应式 (9-59) 的网络初态  $C_n^{(0)}$ 。经过网络演化的网络终态  $\hat{C}_n^{(0)}$  由图 9-14(b) 表示。

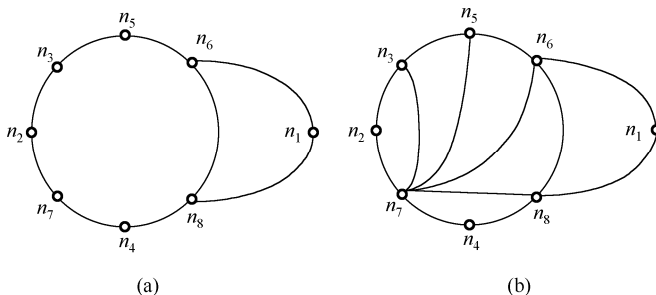


图 9-14 网络演化初态与终态

网络终态  $\hat{C}_n^{(1)}$  由高斯消去法而来，因此它自然与三角分解的上三角矩阵  $\mathbf{U}$  和下三角矩阵  $\mathbf{L}$  相对应。

为了利用前面的结果，本节有意地将式 (9-58) 的节点方程案例与式 (9-59) 的线性方程

组一致。因此式(9-59)的下三角矩阵 $\mathbf{L}$ 与式(9-60)一致,上三角矩阵 $\mathbf{U}$ 与式(9-58)一致。

式(9-58)是关于 $b_1$ 的下三角矩阵 $\tilde{\mathbf{L}}(1)$ 。对式(9-60)而言,它就是关于 $J_1^n$ 的下三角矩阵。将下三角矩阵 $\tilde{\mathbf{L}}(1)$ 非零元素对应的支路用粗线记在图9-15的网络终态中。

图9-15的粗线可以按照如下方法得到:

① 从节点电流源 $J_1^n$ 所在节点 $n_1$ 开始,在网络终态 $\hat{C}_n^{(1)}$ 上寻找与 $n_1$ 邻接并且标号大于1的节点,得到 $n_6$ 和 $n_8$ ;

② 从节点 $n_6$ 开始寻找与 $n_6$ 邻接并且标号大于6的节点,得到 $n_7$ 和 $n_8$ ;

③ 从节点 $n_7$ 开始寻找与 $n_7$ 邻接并且标号大于7的节点,得到 $n_8$ ;

④ 从节点 $n_8$ 开始寻找与 $n_8$ 邻接并且标号大于8的节点,这样的节点不存在。

这样就得到了节点集合 $n_1, n_6, n_7, n_8$ ,它们之间的支路恰好是关于 $J_1^n$ 的下三角矩阵 $\tilde{\mathbf{L}}(1)$ 的非零元素。

式(9-60)是关于 $x_3$ 的下三角矩阵 $\tilde{\mathbf{U}}(3)$ ,对式(9-58)而言,它是关于节点电压 $U_n^3$ 的上三角矩阵。将上三角矩阵 $\tilde{\mathbf{U}}(3)$ 非零元素对应的支路用粗线标记在图9-16中。

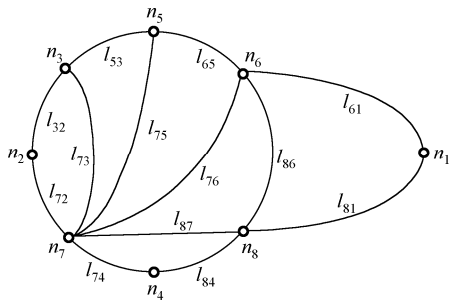


图9-15 网络演化终态

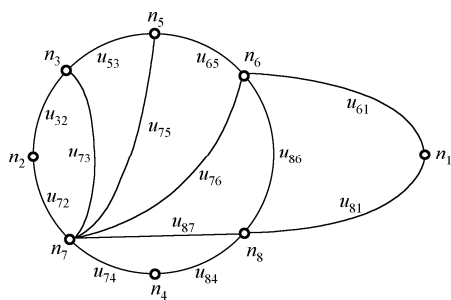


图9-16 网络演化终态

图9-16的粗线可以按照如下方法得到:

① 从待求节点电压 $U_n^3$ 所在节点 $n_3$ 开始,在网络终态 $\hat{C}_n^{(1)}$ 上寻找与 $n_3$ 邻接并且标号大于3的节点,得到 $n_5$ 和 $n_7$ ;

② 从节点 $n_5$ 开始寻找与 $n_5$ 邻接并且标号大于5的节点,得到 $n_6$ 和 $n_7$ ;

③ 从节点 $n_6$ 开始寻找与 $n_6$ 邻接并且标号大于6的节点,得到 $n_7$ 和 $n_8$ ;

④ 从节点 $n_7$ 开始寻找与 $n_7$ 邻接并且标号大于7的节点,得到 $n_8$ ;

⑤ 从节点 $n_8$ 开始寻找与 $n_8$ 邻接并且标号大于8的节点,这样的节点不存在。

这样就得到了节点集合 $n_3, n_5, n_6, n_7, n_8$ ,它们之间的支路恰好是关于 $U_n^3$ 的上三角矩阵 $\tilde{\mathbf{U}}(3)$ 中的元素。

根据上面的实例,关于 $J_i^n$ 的下三角矩阵 $\tilde{\mathbf{L}}(i)$ 和关于 $U_i^n$ 的上三角矩阵 $\tilde{\mathbf{U}}(i)$ 的非零元素,可以用如下的方法在网络终态图 $\hat{C}_n^{(1)}$ 上得到。

(1) 关于 $J_i^n$ 的下三角矩阵 $\tilde{\mathbf{L}}(i)$ 。

从节点 $n_i$ 开始,按照节点编号增大的基本条件递推地寻找邻接节点,直到没有这样的节点为止。所有找到的节点是构成关于 $J_i^n$ 的下三角矩阵 $\tilde{\mathbf{L}}(i)$ 的节点,这些节点之间的所有非零元素就是下三角矩阵 $\tilde{\mathbf{L}}(i)$ 的非零元素。

(2) 关于  $U_i^n$  的上三角矩阵  $\tilde{U}(i)$ 。

从节点  $n_i$  开始, 按照节点编号增大的基本条件递推地寻找邻接节点, 直到没有这样的节点为止。所有找到的节点是构成关于  $U_i^n$  的上三角矩阵  $\tilde{U}(i)$  的节点, 这些节点之间的所有非零元素就是上三角矩阵  $\tilde{U}(i)$  的非零元素。

#### 4. 填充支路定理

完全邻接条件: 节点  $n_i$  与它邻接的节点组成一个节点集合。如果该节点集合中的任意两个节点都相互邻接, 那么节点  $n_i$  满足完全邻接条件。

**定理 9-1** 增添支路定理: 设节点  $n_i$  的邻接集合  $A_i$  有  $m$  个节点和  $j$  条支路。如果要使节点  $n_i$  满足完全邻接条件, 需要增添结构支路数量为

$$k = \frac{m(m-1)}{2} - j \quad (9-72)$$

**证明**  $m$  个节点完全邻接需要  $\frac{m(m-1)}{2}$  条支路。若已存在  $j$  条支路, 与完全结构邻接相差  $k = \frac{m(m-1)}{2} - j$  条结构支路。证毕

根据定理 9-1, 设  $A_i$  为节点  $n_i$  的邻接集合, 并且  $A_i$  有  $m$  个节点, 这  $m$  个节点有  $j$  条邻接支路。那么移去节点  $n_i$  一定产生

$$k_i = \frac{m(m-1)}{2} - j \quad (9-73)$$

条增添支路。

属于邻接集合  $A_i$  中的节点, 两两之间的关系或者邻接, 或者间接。如果间接, 一定通过节点  $n_i$  间接。在图 9-17(a) 中, 节点  $n_1, n_2, n_3$  和  $n_4$  属于节点  $n_i$  的邻接集合  $A_i$ , 这 4 个节点之间的关系如下。

① 邻接关系:  $(n_1, n_2), (n_1, n_3), (n_2, n_4), (n_3, n_4)$ ;

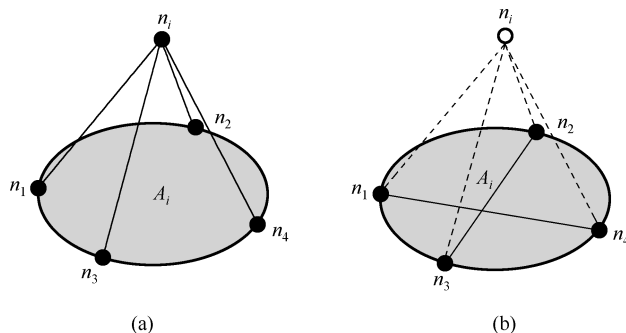


图 9-17 增添支路图

② 通过节点  $n_i$  的间接关系:  $(n_1, n_i, n_4), (n_2, n_i, n_3)$ 。

移去节点  $n_i$  后, 间接关系  $(n_1, n_i, n_4)$  转化为邻接关系  $(n_1, n_4)$ , 间接关系  $(n_2, n_i, n_3)$  转化为邻接关系  $(n_2, n_3)$ , 代价是多了两条增添支路, 如图 9-17(b) 中的两条黑实线。

由式 (9-73) 可以得到相同的结果。在图 9-17 中, 节点  $n_i$  的邻接集合有 4 个节点和 4 条

支路。代入式 (9-73), 得到

$$k_1 = \frac{m(m-1)}{2} - j = \frac{4(4-1)}{2} - 4 = 2$$

可知移去节点  $n_i$  将产生 2 条增添支路。

如果连通网络  $G$  有  $n$  个节点, 对确定的节点编号序列  $\{n\}$ , 移去  $n-1$  个节点产生的增添支路数量为

$$K_k = \sum_{i=1}^{n-1} k_i |_{\{n\}} \quad (9-74)$$

其中,  $k_i$  是移去节点  $n_i$  产生的增添支路, 由式 (9-73) 决定。

### 9.3.8 节点编号技术

可能出现这样的情况, 节点导纳矩阵  $Y_n$  的零元素在 LU 分解形式中变成了非零元素, 这种原来不存在的非零元素叫填充元素。填充元素的出现降低了矩阵的稀疏程度, 对计算效率来说不是好事情。

可以证明, 网络演化中增添支路即是数学上填充元素。这样减少填充元素与减少增添支路等价。

本节讨论的节点编号技术是最大限度减少增添支路出现的技术。

优化编号是一个组合优化问题, 在数学中没有一般性的最优方法。以下介绍的方法也不例外, 但在实际电网计算中都可以起到明显减少填充元素的作用。

#### 1. 动态编号

节点动态优化编号方法的原理很简单, 按照增添支路定理动态地确定网络的节点编号序列。

设移去过程进行到了  $i-1$  个节点, 此时的网络状态是移去状态  $C_n^{(n-1)}$ 。对移去状态  $C_n^{(n-1)}$  的所有节点按照公式 (9-73) 计算增添支路数量, 然后按照以下方式选择要移去的节点:

- ① 选择满足完全邻接条件的节点;
- ② 如果不存在满足完全邻接条件的节点, 选择产生增添支路最少的节点。

这样的节点选择, 从网络初态  $C_n^{(0)}$  开始动态地伴随着节点的移去过程, 持续到移去过程完全结束。

#### 2. 静态编号

节点动态编号的结果很理想, 但每次移去节点前要进行移去的判断, 有些烦琐。

静态编号法不需要动态的形势判断, 在整个节点移去过程开始前根据网络的结构情况一次性完成节点编号。

对于待编号的网络, 静态优化编号法统计每个节点的关联支路数量, 按关联支路数量由少到多的顺序排定节点次序。

静态优化法的根据是增添支路定理为背景的统计学原理, 即

- ① 节点关联的支路少, 节点邻接的节点就少, 这样节点满足完全邻接条件的可能性就大。
- ② 即使不存在不满足完全邻接条件, 移去关联支路少的节点, 出现增添支路的数量也少。

动态优化编号基于准确的计算，静态优化编号基于统计学原理。一般而言，静态编号的效果不会好于动态编号。

### 3. 半动态编号

节点的动态编号效果理想，但方法比较烦琐；静态编号方法简单，但效果较差。本节的半动态节点编号方法是静态编号方法的改进，其优化效果处于动态编号和静态编号之间，优点是具有较快的计算速度。

半动态编号方法在节点移去过程中动态统计出线数量，根据出线数量的动态变化决定节点编号顺序。

半动态编号的方法如下：

- ① 选择一个出线数最小的节点，将其编号为  $n_1$ 。
- ② 移去  $n_1$  得移去状态  $C_n^{(1)}$ 。在移去状态  $C_n^{(1)}$  中选择一个出线数最少的节点，编号为  $n_2$ 。
- ③ 移去  $n_2$  得移去状态  $C_n^{(2)}$ 。在移去状态  $C_n^{(2)}$  中选择一个出线数最少的节点，编号为  $n_3$ 。
- .....

直到所有节点编号完毕。

### 4. 辐射网络的编号

辐射网络没有回路。没有回路何来电流，电网必定有回路。不考虑与大地构成的回路之网络叫“天网”。辐射电网是“天网”中没有回路的网络。

辐射网一定存在悬挂节点。而悬挂节点只与一个节点邻接，自然满足完全邻接的条件。根据增添支路定理，对辐射网络，只要每次节点移去都从悬挂节点开始就不会产生增添支路。因此，辐射网络的节点优化编号问题很容易解决。

辐射网的逆流节点编号方法不产生增添支路。基本方法是：

- ① 将任意一个末端节点（当然是悬挂节点）定为节点  $n_k (k=1)$ ；
- ② 自节点  $n_k$  开始逆流而上的进行节点编号，节点编码不断递增： $k++$ 。如果出现这样的情况则停止始于节点  $n_k$  的逆流编号行动：

甲：遇到没有编号的子节点；

乙：全部节点编号完毕。

如果是情况乙，整个编号过程结束。如果是情况甲，选择尚未编号的末端节点为节点  $n_k$ ，并转入乙。

# 附录

## 附录 A

接地网所有单故障仿真结果列表

节点 故障	3	4	7	8	13	14	18	23
Y1 断裂	60.35	43.63	95.23	57.20	33.12	20.07	-68.38	10.03
Y2 断裂	48.49	37.66	107.0	54.74	33.89	18.86	-66.88	11.65
Y3 断裂	76.38	33.17	102.1	64.30	35.95	19.31	-66.77	11.39
Y4 断裂	65.37	49.67	96.84	59.92	33.93	20.58	-68.25	10.01
Y5 断裂	62.02	44.26	90.57	56.79	32.81	20.08	-68.47	9.996
Y6 断裂	59.26	40.08	118.4	45.08	32.29	18.11	-66.54	12.34
Y7 断裂	68.43	41.52	102.0	68.68	37.10	18.77	-66.39	11.64
Y8 断裂	64.14	45.82	96.49	59.85	33.97	20.98	-68.25	9.994
Y9 断裂	63.48	45.22	96.27	58.44	31.68	20.07	-68.77	9.996
Y10 断裂	71.73	46.72	127.1	61.28	2.283	11.87	-65.93	18.25
Y11 断裂	65.99	45.77	99.73	62.21	41.54	15.99	-65.00	12.51
Y12 断裂	63.33	45.33	95.79	58.80	33.70	21.58	-68.41	9.849
Y13 断裂	57.57	41.32	87.39	53.62	31.04	18.82	-65.42	10.20
Y14 断裂	124.8	89.46	189.0	115.8	65.64	40.60	-136.4	18.84
Y15 断裂	41.69	28.97	69.47	36.19	5.885	11.60	-116.3	-22.42
Y16 断裂	57.83	40.59	89.74	53.10	27.20	15.31	-75.98	2.954
Y17 断裂	65.80	47.31	99.19	61.07	35.10	21.82	-68.72	7.306
Y18 断裂	109.3	82.25	155.8	103.5	71.67	45.43	-55.41	38.65
Y19 断裂	69.44	50.75	102.7	64.94	40.15	25.08	-59.92	22.95
Y20 断裂	60.83	43.07	93.15	56.23	30.88	18.43	-71.22	6.874
Y21 断裂	60.35	43.63	95.23	57.20	33.12	20.07	-68.38	10.03
Y22 断裂	60.46	43.92	98.68	58.08	33.33	20.27	-68.52	9.799
Y23 断裂	69.04	47.21	95.80	55.82	32.41	20.50	-69.02	9.383
Y24 断裂	65.50	51.80	96.41	59.12	33.40	20.02	-68.58	9.727
Y25 断裂	65.37	49.67	96.84	59.92	33.93	20.58	-68.25	10.01
Y26 断裂	53.54	38.84	81.55	50.78	32.25	18.29	-66.74	12.23
Y27 断裂	53.32	38.69	76.01	49.86	33.88	18.68	-66.70	11.77
Y28 断裂	76.60	54.88	104.2	76.42	24.08	21.28	-71.47	8.010
Y29 断裂	71.95	57.41	101.6	66.64	35.39	15.81	-67.40	10.82
Y30 断裂	72.20	57.46	102.2	66.48	37.68	22.29	-65.78	12.19
Y31 断裂	50.27	35.69	77.47	46.71	25.99	15.41	-65.44	15.71
Y32 断裂	36.44	24.41	58.50	32.36	11.65	7.732	-58.71	23.43
Y33 断裂	102.9	80.97	130.7	103.0	103.4	51.14	-107.8	-11.48
Y34 断裂	78.05	62.12	108.3	73.32	46.72	44.66	-64.28	12.94
Y35 断裂	77.41	61.48	108.2	72.44	45.42	35.90	-60.49	16.74
Y36 断裂	65.80	47.31	99.19	61.07	35.10	21.82	-68.72	7.306
Y37 断裂	76.51	56.27	112.5	71.85	45.79	28.50	-61.97	-7.452
Y38 断裂	37.00	20.50	70.83	30.85	-2.801	-3.145	-136.7	8888.98
Y39 断裂	58.38	40.26	91.09	53.80	28.60	14.92	-72.71	8.106
Y40 断裂	65.35	47.59	97.67	60.75	35.40	22.95	-66.70	1111.39

## 附录 B

节点分析法中,用于 MATLAB 软件仿真程序。

正常情况下

```
Y=zeros(24);
Y(1,1)=56.16;Y(5,5)=56.16;Y(21,21)=56.16;
Y(2,2)=72.882;Y(4,4)=72.882;Y(22,22)=72.882;Y(24,24)=72.882;
Y(3,3)=62.43;Y(23,23)=62.43;
Y(6,6)=73.551;Y(10,10)=73.551;Y(16,16)=73.551;Y(20,20)=73.551;
Y(7,7)=90.273;Y(9,9)=90.273;Y(17,17)=90.273;Y(19,19)=90.273;
Y(8,8)=79.821;Y(18,18)=79.821;
Y(11,11)=61.956;Y(15,15)=61.956;
Y(12,12)=78.678;Y(14,14)=78.678;
Y(13,13)=68.226;
Y(1,2)=-27.174;
Y(2,1)=-27.174;
Y(4,5)=-27.174;
Y(5,4)=-27.174;
Y(6,7)=-27.174;
Y(7,6)=-27.174;
Y(9,10)=-27.174;
Y(10,9)=-27.174;
Y(11,12)=-27.174;
Y(12,11)=-27.174;
Y(14,15)=-27.174;
Y(15,14)=-27.174;
Y(16,17)=-27.174;
Y(17,16)=-27.174;
Y(19,20)=-27.174;
Y(20,19)=-27.174;
Y(21,22)=-27.174;
Y(22,21)=-27.174;
Y(2,3)=-16.722;
Y(3,2)=-16.722;
Y(3,4)=-16.722;
Y(4,3)=-16.722;
Y(7,8)=-16.722;
Y(8,7)=-16.722;
Y(8,9)=-16.722;
Y(9,8)=-16.722;
Y(12,13)=-16.722;
Y(13,12)=-16.722;
Y(13,14)=-16.722;
Y(14,13)=-16.722;
Y(17,18)=-16.722;
```



[illegible]

**Y3 故障**

修改导纳矩阵元素:

$$Y(3,3)=45.708;$$

$$Y(3,4)=0;$$

$$Y(4,3)=0;$$

$$Y(4,4)=56.16$$

**Y6 故障**

修改导纳矩阵元素:

$$Y(7,7)=73.551;$$

$$Y(7,8)=0;$$

$$Y(8,7)=0;$$

$$Y(8,8)=63.099$$

**Y7 故障**

修改导纳矩阵元素:

$$Y(8,8)=63.099;$$

$$Y(8,9)=0;$$

$$Y(9,8)=0;$$

$$Y(9,9)=73.551$$

**Y16 故障**

修改导纳矩阵元素:

$$Y(19,19)=63.099;$$

$$Y(19,20)=0;$$

$$Y(20,19)=0;$$

$$Y(20,20)=46.377$$

**Y17 故障**

修改导纳矩阵元素:

$$Y(16,16)=44.565;$$

$$Y(16,21)=0;$$

$$Y(22,21)=0;$$

$$Y(22,22)=45.708$$

**Y19 故障**

修改导纳矩阵元素:

$$Y(23,23)=45.708;$$

$$Y(23,24)=0;$$

$$Y(24,23)=0;$$

$$Y(24,24)=56.16$$

**Y23 故障**

修改导纳矩阵元素:

$$Y(3,3)=33.444;$$

$$Y(3,8)=0;$$

$$Y(8,3)=0;$$

$$Y(8,8)=50.835$$

### Y26 故障

修改导纳矩阵元素:

$$Y(6,6)=56.16;$$

$$Y(6,11)=0;$$

$$Y(11,6)=0;$$

$$Y(11,11)=44.565$$

### Y29 故障

修改导纳矩阵元素:

$$Y(9,9)=72.882;$$

$$Y(9,14)=0;$$

$$Y(14,9)=0;$$

$$Y(14,14)=61.287$$

### Y34 故障

修改导纳矩阵元素:

$$Y(14,19)=0;$$

$$Y(14,14)=61.278;$$

$$Y(19,14)=0;$$

$$Y(19,19)=72.882$$

### Y39 故障

修改导纳矩阵元素:

$$Y(19,19)=61.287;$$

$$Y(19,24)=0;$$

$$Y(24,19)=0;$$

$$Y(24,24)=43.896$$

### 特殊故障

当地网中第 14 条支路和第 27 条支路均被腐蚀,阻值变为  $R_{14}=R_{27}=0.075\Omega$ 。

修改导纳矩阵元素为:

$$Y(7,7)=86.215;$$

$$Y(7,12)=-13.333;$$

$$Y(12,7)=-13.333;$$

$$Y(12,12)=74.62;$$

$$Y(17,17)=86.884;$$

$$Y(17,18)=-13.333;$$

$$Y(18,17)=-13.333;$$

$$Y(18,18)=76.432$$

当地网中第 14 条支路腐蚀至  $R_{14}=0.065\Omega$ , 第 27 条支路断裂。

修改导纳矩阵元素为:

```
Y(7,7)=72.882;
Y(7,12)=0;
Y(12,7)=0;
Y(12,12)=61.287;
Y(17,17)=88.936;
Y(17,18)=-15.385;
Y(18,17)=-15.385;
Y(18,18)=78.485
```

## 附 录 C

在网络撕裂法中, 用于 MATLAB 软件仿真程序。

当故障情况未知, 而撕裂处节点电压已知, 求此时的撕裂处的各支路电流:

```
Y=zeros(24);
Y(1,1)=56.16;Y(5,5)=56.16;Y(21,21)=56.16;
Y(2,2)=72.882;Y(4,4)=72.882;Y(22,22)=72.882;Y(24,24)=72.882;
Y(3,3)=62.43;Y(23,23)=62.43;
Y(6,6)=73.551;Y(10,10)=73.551;Y(16,16)=73.551;Y(20,20)=73.551;
Y(7,7)=90.273;Y(9,9)=90.273;Y(17,17)=90.273;Y(19,19)=90.273;
Y(8,8)=79.821;Y(18,18)=79.821;
Y(11,11)=61.956;Y(15,15)=61.956;
Y(12,12)=78.678;Y(14,14)=98.678;
Y(13,13)=68.226;
Y(1,2)=-27.174;
Y(2,1)=-27.174;
Y(4,5)=-27.174;
Y(5,4)=-27.174;
Y(6,7)=-27.174;
Y(7,6)=-27.174;
Y(9,10)=-27.174;
Y(10,9)=-27.174;
Y(11,12)=-27.174;
Y(12,11)=-27.174;
Y(14,15)=-27.174;
Y(15,14)=-27.174;
Y(16,17)=-27.174;
Y(17,16)=-27.174;
Y(19,20)=-27.174;
Y(20,19)=-27.174;
Y(21,22)=-27.174;
Y(22,21)=-27.174;
Y(2,3)=-16.722;
Y(3,2)=-16.722;
```

Y(3,4)=-16.722;  
Y(4,3)=-16.722;  
Y(7,8)=-16.722;  
Y(8,7)=-16.722;  
Y(8,9)=-16.722;  
Y(9,8)=-16.722;  
Y(12,13)=-16.722;  
Y(13,12)=-16.722;  
Y(13,14)=-16.722;  
Y(14,13)=-16.722;  
Y(17,18)=-16.722;  
Y(18,17)=-16.722;  
Y(18,19)=-16.722;  
Y(19,18)=-16.722;  
Y(22,23)=-16.722;  
Y(23,22)=-16.722;  
Y(23,24)=-16.722;  
Y(24,23)=-16.722;  
Y(1,6)=-28.986;  
Y(6,1)=-28.986;  
Y(2,7)=-28.986;  
Y(7,2)=-28.986;  
Y(3,8)=-28.986;  
Y(8,3)=-28.986;  
Y(4,9)=-28.986;  
Y(9,4)=-28.986;  
Y(5,10)=-28.986;  
Y(10,5)=-28.986;  
Y(16,21)=-28.986;  
Y(21,16)=-28.986;  
Y(17,22)=-28.986;  
Y(22,17)=-28.986;  
Y(18,23)=-28.986;  
Y(23,18)=-28.986;  
Y(19,24)=-28.986;  
Y(24,19)=-28.986;  
Y(6,11)=-17.391;  
Y(11,6)=-17.391;  
Y(7,12)=-17.391;  
Y(12,7)=-17.391;  
Y(8,13)=-17.391;  
Y(13,8)=-17.391;  
Y(9,14)=-17.391;  
Y(14,9)=-17.391;  
Y(10,15)=-17.391;  
Y(15,10)=-17.391;  
Y(11,16)=-17.391;

```

Y(16,11)=-17.391;
Y(12,17)=-17.391;
Y(17,12)=-17.391;
Y(13,18)=-17.391;
Y(18,13)=-17.391;
Y(14,19)=-17.391;
Y(19,14)=-17.391;
Y(15,20)=-17.391;
Y(20,15)=-17.391
…… %%各故障情况下的导纳矩阵修改元素

```

**故障一** Y(9,9)=63.099;

```

Y(10,10)=46.377;
Y(14,14)=81.287;
Y(19,19)=72.882;
Y(9,10)=0;
Y(10,9)=0;
Y(14,19)=0;
Y(19,14)=0

```

**故障二** Y(9,9)=76.686;

```

Y(10,10)=59.964;
Y(9,10)=-13.587;Y(10,9)= -13.587;
Y(13,13)=51.504;
Y(14,14)=81.956;
Y(13,14)=0;Y(14,13)=0;
Y(19,19)=61.287;
Y(24,24)=43.896;
Y(19,24)=0;
Y(24,19)=0

```

**故障三** Y(9,9)=63.099;

```

Y(10,10)=46.377;
Y(9,10)=0;Y(10,9)=0;
Y(13,13)=59.865;
Y(14,14)=90.317;
Y(13,14)=-8.361;Y(14,13)=-8.361;
Y(19,19)=75.78;
Y(24,24)=58.389;
Y(19,24)=-14.493;Y(24,19)=-14.493

```

**故障四** Y(8,8)=75.969;

```

Y(9,9)=86.421;
Y(8,9)=-12.870;Y(9,8)=-12.870;
Y(5,5)=45.29;
Y(10,10)=62.681;
Y(5,10)=-18.116;Y(10,5)=-18.116;

```

```

Y(13,13)=51.504;
Y(14,14)=67.033;
Y(13,14)=0;Y(14,13)=0;
Y(15,15)=54.199;
Y(19,19)=83.107;
Y(14,15)=-19.417;Y(15,14)=-19.417;
Y(14,19)=-10.225;Y(19,14)=-10.225;
Y(24,24)=63.824      )
I=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 10 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
J=I';
U=inv(Y)*J %得到故障时的节点电压
K=[Y(2,3);Y(7,8);Y(12,13);Y(17,18);Y(22,23)]; %撕裂处的支路导纳
V=[0.1931-U(3),0.1909-U(8),0.1824-U(13),0.1647-U(18),0.1574-U(23)];
      %撕裂处的支路电压
L=K*V;      %撕裂处的支路电流
D=L(1,1)+L(2,2)+L(3,3)+L(4,4)+L(5,5) %验证电流流入网络中的各支路电流和是否为零

```

## 参考文献

- [1] 张伯明, 陈寿孙, 严正. 高等电力网络分析(第二版)[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009.9.
- [2] 蔡金锭, 王少芳. 区间分析法在容差网络灵敏度计算中的应用[J]. 电路与系统学报, 2003.8.
- [3] 熊志伟, 蔡金锭. 信号流图在配电网潮流计算中的应用[J]. 继电器, 2006, 34(19).
- [4] 彭正未. 电网络理论[M]. 武汉: 武汉水利水电大学出版社, 1999.11.
- [5] 郭志忠. 电力网络解析论[M]. 北京: 科学出版社, 2008.5.
- [6] 吴宁. 电网络分析与综合[M]. 北京: 科学出版社, 2003.3.
- [7] 陈珩. 电力系统稳态分析(第三版)[M]. 北京: 中国电力出版社, 2007.6.
- [8] 邱关源, 罗先觉. 电路(第五版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.5.
- [9] 秦福星, 吴正国, 杨宣访. 基于电路功能的分区诊断故障字典法[J]. 微计算机信息, 2009(7): 118-119.
- [10] 张选利, 刘庆珍, 蔡金锭. 电力系统接地网故障的自动检测[J]. 福建电力与电工, 2003, 23(3): 12-14.
- [11] 刘庆珍, 蔡金锭. 电力系统接地网故障的无伤检测方法[J]. 高电压技术, 2003, 29(6): 47-51.
- [12] 王才华. 基于故障树思想的模拟电路故障诊断[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2006.
- [13] 曾晓华. 故障字典法在模拟直流电路故障诊断中的应用研究[J]. 科技资讯, 2009, 19: 121.
- [14] 周庭阳, 张红岩. 电网络理论(图论 方程 综合)[M]. 机械工业出版社, 2008.9.
- [15] N.巴拉巴拉安, T.A.比卡特. 电网络理论[M]. 高等教育出版社, 1983.9.
- [16] 黄慕义. 电网络理论[M]. 华中工业学院出版社, 1986.
- [17] 俎云霄, 吕玉琴. 网络分析与综合[M]. 机械工业出版社, 2007.1.
- [18] J.R.Abramhams, el. Signal Flow Analysis[M]. 1992.6.
- [19] D.E.Johnron, el. Applied Graph Theory[M]. 1986.4.
- [20] 陈怀海. 非确定结构系统区间分析的直接优化法[J]. 南京航空航天大学学报, 1999.4
- [21] 张友纯, 黄鹰. 容差条件下“黑箱”单子网络故障的可诊断性分析[J]. 电路与系统学报, 2000, 21(3): 75-77
- [22] 邹锐. 模拟电路故障诊断原理和方法[M]. 华中理工大学出版社, 1988 年
- [23] 陈圣俭, 洪炳熔等. 可诊断容差模拟电路软故障的新故障字典法[J]. 电子学报, 2000, 28(2): 127-129.
- [24] 沈祖和. 区间分析方法及其应用[M]. 应用数学与计算数学. 1983(2): 1-26.
- [25] Svetoslav Markvol. An Iterative Method for Algebraic Solution to Interval Equations[J]. Applied Numerical Mathematics, 1999(30): 225-239.
- [26] 吴芝路, 陈圣, 王月芳. 模拟电路实用故障诊断新方法[J]. 电子测量与仪器学报, 2000, 14(2): 41-45.
- [27] 张志涌, 杨祖樱. 非线性容差电路的故障诊断[J]. 通信学报, 1994, 15(4): 21-28.
- [28] 孙义闯. 非线性电路故障节点诊断的一种方法[J]. 通信学报, 1987, 8(3): 92-96.
- [29] 蔡金锭, 马西奎, 黄东泉, 张选利. 非线性容差子网络级故障的识别法[J]. 微电子学, 2001, 22(6).
- [30] 罗先觉, 邱关源. 开关电容网络故障子网络的诊断[J]. 西安交通大学学报, 1990, 25(2): 11-20.
- [31] 李承. 电网络的灵敏度研究[J]. 武汉汽车工业大学学报, 2000, 22(3): 56-59.